

 光电信息科学与工程类专业规划教材

光波导理论

基础教程

李淑凤 李成仁 宋昌烈 编著



电子工业出版社

PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY <http://www.phei.com.cn>

光电信息科学与工程类专业规划教材

光波导理论基础教程

李淑凤 李成仁 宋昌烈 编 著

電子工業出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京·BEIJING

内 容 简 介

本书以几何光学和波动光学理论为基础,系统阐述了介质光波导的分析方法和光传输特性。波导涉及阶跃式折射率分布和渐变式折射率分布的二维薄膜波导、三维条形波导及光纤,主要内容涵盖各种波导的解析与数值分析方法、模式分类与特征、模式场的分布与传输特性、模耦合理论等,并介绍了几种无源光波导器件和光波导放大器的工作原理及特性,同时对光子晶体波导也做了介绍。每章都附有一定数量的习题。

本书可作为光学工程、光电子、光通信等专业的研究生及高年级本科生的教材,也可供相关专业的教师和科研人员参考。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,侵权必究。

图书在版编目(CIP)数据

光波导理论基础教程 / 李淑凤, 李成仁, 宋昌烈编著. —北京: 电子工业出版社, 2013.4

ISBN 978-7-121-19714-7

I. ①光… II. ①李… ②李… ③宋… III. ①光波导—高等学校—教材 IV. ①TN252

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 039933 号

责任编辑: 韩同平 特约编辑: 张庆杰

印 刷:

装 订:

出版发行: 电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编: 100036

开 本: 787×1092 1/16 印张: 11.75 字数: 330 千字

印 次: 2013 年 4 月第 1 次印刷

印 数: 2 000 册 定价: 39.90 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题, 请向购买书店调换。若书店售缺, 请与本社发行部联系, 联系及邮购电话: (010) 88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn, 盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线: (010) 88258888。

前 言

21 世纪人类已进入以光通信和信息网络为主要特征的信息时代，社会 and 科技领域对于获取信息、传输信息、处理信息和存储信息的要求越来越高。与信息有关的光通信、光电子、光传感、光集成、半导体激光等各种新技术，正以空前的速度和规模迅猛发展。随着光传输技术和半导体激光技术的发展而逐步建立起来的光波导理论是光通信与光电子技术的主要理论基础，一直受到科技人员的重视。掌握该理论对有关专业的研究工作者和技术人员理解新概念、掌握新方法、发现新现象和创造新技术都是十分必要和有益的。

目前国内外许多高校都为光学工程、光学、光电子、光通信等相关专业的研究生和高年级本科生开设了光波导理论课程。本书是作者在十余年讲授研究生课程“光波导理论基础”的基础上，结合课程讲义和作者的科研成果而完成的。

本书共 12 章，系统地介绍了分析光波导的几何光学理论和波动光学理论，所选择的内容都是光波导的基础理论部分，对光波导的场模式理论、传输理论、光无源器件、光有源器件等都做了详尽论述。为体现学科前沿成果，保证教材质量，在内容上充分吸收国内外相关研究成果，并融入编著者近年来在无源/有源光波导领域的部分研究成果，突出思想性、针对性、科学性和系统性。在教材的编写上，作者力求理论体系完整、物理概念清晰明确、内容简明扼要、数学推导简洁严整。

本书第 1 章~第 8 章、第 11 章由李淑凤、宋昌烈编写，第 9 章由李成仁和李淑凤编写，第 10 章、第 12 章由李成仁编写，李淑凤统编全稿。宋昌烈教授在编写课程讲义和详细教材大纲中付出了大量心血。研究生冯希会、杜雨洲和梁翠翠做了部分数值计算、习题编写和校对工作。赵明山教授认真审阅了全部书稿，并提出了许多宝贵建议。

本教材是在大连理工大学研究生院教改基金资助下完成的，同时得到了物理与光电工程学院以及光学工程学科的大力支持。

由于作者水平有限，书中难免有不妥和错误之处，恳请读者批评指正。

作 者
于大连理工大学

目 录

第 1 章 电磁场理论	(1)
1.1 麦克斯韦方程	(1)
1.2 电磁场边界条件	(2)
1.3 单色平面电磁波	(3)
1.4 坡印亭矢量和传输功率	(4)
1.5 亥姆霍兹方程	(5)
1.6 平面电磁波的反射和折射	(6)
1.7 光的全反射与倏逝波	(7)
1.8 全反射相移与古斯-汉森位移	(8)
习题	(10)
第 2 章 几何光学	(11)
2.1 程函方程	(11)
2.2 光传播路径分析	(12)
2.2.1 光线方程	(12)
2.2.2 光线方程应用举例	(12)
2.3 费马原理	(13)
习题	(14)
第 3 章 光波导几何分析	(15)
3.1 均匀介质薄膜波导	(15)
3.2 折射率渐变薄膜波导中的光线	(16)
3.3 阶跃光纤中的光线	(17)
3.3.1 子午光线	(18)
3.3.2 偏斜光线	(19)
3.4 梯度光纤中的光线	(20)
3.4.1 柱坐标的光线方程	(20)
3.4.2 光线不变量	(21)
3.4.3 光线判据函数	(21)
3.4.4 光线分析	(22)
3.5 传播时延与色散特性	(24)
3.5.1 均匀介质波导的时延差	(24)
3.5.2 折射率渐变介质波导的时延差	(25)
3.5.3 光纤的色散	(27)
习题	(28)
第 4 章 薄膜波导模式理论	(30)
4.1 均匀薄膜波导特征方程	(30)
4.2 薄膜波导电磁场方程	(31)
4.3 TE 模分析	(33)
4.4 TM 模分析	(35)

4.5	导模特性	(36)
4.5.1	导模截止	(36)
4.5.2	导模定则	(37)
4.5.3	导模数量	(38)
4.5.4	单模传输	(39)
4.5.5	截止波长	(39)
4.5.6	归一化参量与薄膜波导色散曲线	(40)
4.6	导模光强和功率	(41)
4.6.1	导模光强	(41)
4.6.2	传输功率	(42)
	习题	(43)
第 5 章	三维光波导	(44)
5.1	三维光波导结构	(44)
5.2	马卡提里近似法	(45)
5.3	场方程与形式解	(46)
5.4	E_{mn}^x 模特征方程	(47)
5.5	E_{mn}^y 模特征方程	(49)
5.6	模式特性	(50)
5.6.1	导模条件与模截止	(50)
5.6.2	单模传输	(52)
5.6.3	截止波长	(52)
5.6.4	矩形波导色散曲线与模场分布	(53)
5.7	有效折射率法	(54)
5.7.1	矩形波导	(54)
5.7.2	脊波导	(55)
5.7.3	条载波导及四层平板波导	(56)
	习题	(58)
第 6 章	光纤模式理论	(59)
6.1	光纤的电磁场方程	(59)
6.2	阶跃光纤电磁场方程的矢量解法	(61)
6.2.1	芯区和包层的电磁场	(61)
6.2.2	导模特征方程	(64)
6.2.3	导模分类	(64)
6.2.4	导模截止条件与单模传输	(66)
6.2.5	模色散曲线	(71)
6.2.6	导模电磁场分布	(72)
6.3	光纤的线偏振模	(75)
6.3.1	场的直角分量与场方程的标量解法	(75)
6.3.2	线偏振模及简并度	(77)
6.3.3	LP _{mn} 模的矢量模组成	(79)
6.3.4	LP 模光强和功率	(80)
6.3.5	阶跃多模光纤的导模数量	(82)
6.4	梯度光纤模场分析	(83)
6.4.1	梯度光纤场方程及标量解	(83)
6.4.2	传播常数	(86)
6.4.3	模式群和导模数量	(86)

习题	(87)
第 7 章 电磁场分析的有限元法	(89)
7.1 微分方程边值问题	(89)
7.1.1 边值问题	(89)
7.1.2 Ritz 方法	(90)
7.1.3 Galerkin 方法	(91)
7.1.4 本征值方程	(92)
7.2 有限元分析	(92)
7.2.1 区域离散和单元划分	(93)
7.2.2 线性插值函数与基函数	(93)
7.2.3 单元方程的扩展——全局方程的建立	(94)
7.2.4 二阶单元与基函数	(96)
7.3 光波导模式问题的应用举例	(96)
7.3.1 单元大小对计算结果的影响	(96)
7.3.2 脊波导模场的有限元计算	(97)
7.3.3 伪模	(99)
习题	(99)
第 8 章 模式耦合理论	(100)
8.1 模式的正交性与完备性	(100)
8.1.1 横场方程	(100)
8.1.2 模式的正交性及归一化	(101)
8.1.3 展开式的完备性	(103)
8.2 模耦合方程	(103)
8.2.1 理想正规模式展开的模耦合方程	(103)
8.2.2 本地正规模式展开的模耦合方程	(105)
8.3 模耦合方程的微扰解——双向模耦合	(106)
习题	(107)
第 9 章 无源光器件	(108)
9.1 光纤光栅	(108)
9.1.1 光纤光栅耦合方程	(109)
9.1.2 光纤光栅传输特性	(111)
9.1.3 光纤光栅滤波特性	(112)
9.2 平面波导光栅	(114)
9.3 双波导定向耦合器	(117)
9.4 波分复用/解复用器	(120)
9.4.1 角色散型	(120)
9.4.2 干涉型	(122)
9.4.3 F-P 腔光滤波型	(124)
9.4.4 阵列波导光栅	(125)
9.5 光开关	(126)
习题	(129)
第 10 章 光波导放大器	(130)
10.1 概述	(130)
10.2 铒离子的光谱特性	(131)
10.2.1 Er^{3+} 能级结构	(131)
10.2.2 Er^{3+} 的光致发光机制	(133)

10.3	速率方程	(134)
10.3.1	光放大原理及光泵浦波长	(134)
10.3.2	铯-铷共掺系统的速率方程	(136)
10.3.3	铷离子荧光特性	(138)
10.3.4	粒子数反转	(139)
10.4	光波传输方程	(140)
10.5	放大器增益特性	(141)
	习题	(144)
第 11 章	光子晶体波导	(146)
11.1	光子晶体理论	(146)
11.1.1	光子晶体结构与两种晶格	(146)
11.1.2	平面波展开法	(149)
11.1.3	二维光子晶体带隙结构	(151)
11.2	光子晶体波导	(153)
11.2.1	二维光子晶体波导	(153)
11.2.2	二维平板光子晶体波导	(154)
	习题	(156)
第 12 章	光波导的制备	(157)
12.1	概述	(157)
12.2	光纤制造	(158)
12.3	薄膜制备	(158)
12.3.1	蒸发法	(159)
12.3.2	直流磁控溅射法	(159)
12.3.3	中频、射频磁控溅射法	(160)
12.3.4	脉冲激光沉积法	(160)
12.3.5	薄膜制备的化学方法	(161)
12.3.6	薄膜的退火	(162)
12.4	薄膜的表征	(163)
12.4.1	X 射线衍射仪	(163)
12.4.2	扫描电镜	(164)
12.4.3	电子探针	(165)
12.5	三维光波导的制作	(166)
12.5.1	光刻技术	(166)
12.5.2	加工技术	(167)
	习题	(169)
附录 A	Bessel 方程与 Bessel 函数	(170)
A.1	Bessel 方程与 Bessel 函数	(170)
A.2	各类 Bessel 函数的渐近展开式	(171)
A.3	Bessel 函数的递推关系	(171)
附录 B	LP_{mn} 模特征方程与其组成的矢量模特征方程的等价性	(173)
附录 C	自伴算符	(174)
C.1	二维散度定理	(174)
C.2	自伴算符	(174)
	参考文献	(175)

第 1 章 电磁场理论

1.1 麦克斯韦方程

19 世纪 60 年代, 英国物理学家麦克斯韦(Maxwell)在前人成就的基础上, 提出了涡旋电场和位移电流假设, 并凭借他高深的数学造诣, 将电磁场理论用简洁、对称、完美的数学形式表示出来, 经后人整理和改写, 成为完整描述客观电磁场的一套基本方程, 称为麦克斯韦方程。根据这组方程, 麦克斯韦预言了电磁波的存在, 并确认光波的电磁本质。迄今为止, 麦克斯韦的经典电磁理论仍然是分析光的传输问题的理论基础。

电磁场可以用电场强度 \vec{E} 、电位移矢量 \vec{D} 、磁场强度 \vec{H} 以及磁感应强度 \vec{B} 四个场矢量描述, 它们是位置矢量 \vec{r} 和时间 t 的函数, 场矢量随空间和时间的变化规律由如下麦克斯韦方程给出

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.1-1a)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \quad (1.1-1b)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (1.1-1c)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.1-1d)$$

式中, \vec{J} 为传导电流密度, ρ 为自由电荷密度。

实际应用中, 为完全确定电磁场矢量随时间和空间的变化, 除此基本方程外, 还必须借助于电磁场与介质的相互作用关系, 即物质方程

$$\vec{J} = \gamma \vec{E} \quad (1.1-2a)$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (1.1-2b)$$

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \quad (1.1-2c)$$

式中, γ 为介质的电导率, \vec{P} 为介质的极化强度, \vec{M} 为磁化强度, ϵ_0 和 μ_0 分别为真空介电常数和真空磁导率。如果是各向同性的线性介质, 则其极化强度和磁化强度分别与电场强度和磁场强度成线性关系, 即

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \quad (1.1-3a)$$

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad (1.1-3b)$$

式中, χ_e 和 χ_m 分别是介质的极化率和磁化率, 则物质方程可简化为

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon \vec{E} \quad (1.1-4a)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H} \quad (1.1-4b)$$

式中, $\epsilon_r = 1 + \chi_e$, $\mu_r = 1 + \chi_m$, 分别是介质的相对介电常数和相对磁导率, ϵ 和 μ 分别是介质的介电常数和磁导率。介质的折射率 $n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$, 对非铁磁性介质, $\mu_r \approx 1$, 因此认为一般情况下介质的折射率为 $n = \sqrt{\epsilon_r}$ 。

在各向异性介质中, 介质的极化强度和磁化强度与电磁场的方向有关, 即 χ_e 和 χ_m 不再是

常数, 因此 ϵ 和 μ 也不再是常数, 它们都要用二阶张量表示。物质方程在直角(笛卡儿)坐标系中需写成

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \quad (1.1-5a)$$

$$\begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} \quad (1.1-5b)$$

当介质无吸收和无旋光性时, ϵ_{ij} 是实数, 并且介电张量是对称的, 即 $\epsilon_{ij}=\epsilon_{ji}$ 。式(1.1-5a)经主轴变换后, 介电张量只有三个对角分量, 在主轴坐标系中物质方程可表示为

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \quad (1.1-6)$$

对于非磁性各向异性介质, \vec{B} 和 \vec{H} 的关系与各向同性的介质是一样的, 所以通常介质的各向异性主要表现在对电磁波中电场的作用。

1.2 电磁场边界条件

在利用麦克斯韦方程解决有限空间的电磁场问题, 或者涉及两种及两种以上介质内的电磁场问题时, 除了考虑物质方程外, 还必须考虑介电常数不连续处的边界条件。因为物理量在界面上发生跃变, 微分形式的麦克斯韦方程不再适用, 需利用如下麦克斯韦方程的积分形式

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{L} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (1.2-1a)$$

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{L} = \iint_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} \quad (1.2-1b)$$

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho dV \quad (1.2-1c)$$

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (1.2-1d)$$

如图 1.1 所示, 设两种介质的电磁参数分别为 ϵ_1 、 μ_1 和 ϵ_2 、 μ_2 , 折射率分别为 n_1 和 n_2 , 分界面法线方向的单位矢量为 \vec{n} , 切向单位矢量为 $\vec{\tau}$ 。在界面附近沿界面的切向取一个小的狭长矩形回路, 如图 1.1(a)所示。回路两个长边分别在两种介质内, 平行并无限靠近界面, 短边趋于零, 则回路所围曲面面积趋于零, 利用式(1.2-1a)和式(1.2-1b), 可得

$$\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \quad (1.2-2a)$$

$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{J}_S \quad (1.2-2b)$$

式中, \vec{J}_S 为面电流密度。

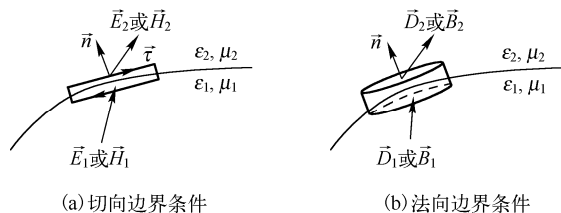


图 1.1 电磁场边值关系示意图

在两种介质的分界面附近取一小的扁平状圆柱，如图 1.1(b) 所示。圆柱的两个底面分别在两种介质内，平行并无限靠近界面，柱高趋于零，则侧面面积趋于零，利用式 (1.2-1c) 和式 (1.2-1d)，可得

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma_s \quad (1.2-2c)$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \quad (1.2-2d)$$

式中， σ_s 为电荷面密度。

对非导电介质， $\sigma_s = 0$ ， $J_s = 0$ ，四个电磁场矢量的边界条件可简化为

$$\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \quad (1.2-3a)$$

$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = 0 \quad (1.2-3b)$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = 0 \quad (1.2-3c)$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \quad (1.2-3d)$$

该边界条件表明，在界面上，电位移矢量和磁感应强度的法向分量连续，电场强度和磁场强度的切向分量连续，即

$$D_{1n} = D_{2n} \quad (1.2-4a)$$

$$B_{1n} = B_{2n} \quad (1.2-4b)$$

$$E_{1\tau} = E_{2\tau} \quad (1.2-4c)$$

$$H_{1\tau} = H_{2\tau} \quad (1.2-4d)$$

对各向同性的线性介质，式 (1.2-4a) 也经常写作 $n_1^2 E_{1n} = n_2^2 E_{2n}$ 。

1.3 单色平面电磁波

一定频率的电磁波，电磁场对时间的依赖关系是 $e^{i\omega t}$ ，所以单色电磁波的基本表示式为

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}) e^{i\omega t} \quad (1.3-1a)$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}(\vec{r}) e^{i\omega t} \quad (1.3-1b)$$

因而 $\frac{\partial}{\partial t} \vec{E} = i\omega \vec{E}$ ， $\frac{\partial}{\partial t} \vec{H} = i\omega \vec{H}$ 。对于各向同性的线性光学介质（通常为非导体）， $\rho = 0$ ， $J = 0$ ， $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ ， $\vec{B} = \mu \vec{H}$ ，由此，麦克斯韦方程式 (1.1-1) 可简化为不含时间因子的形式，即

$$\nabla \times \vec{E} = -i\omega \mu \vec{H} \quad (1.3-2a)$$

$$\nabla \times \vec{H} = i\omega \epsilon \vec{E} \quad (1.3-2b)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0 \quad (1.3-2c)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.3-2d)$$

上式为单色电磁波的基本方程。这组方程只有前两式是独立的，其他两式可以由前两式取散度运算导出。虽然对于非磁性介质， $\mu_r \approx 1$ ， $\mu \approx \mu_0$ ，但为了方程形式上的完美和对称，这里仍用 μ 表示，只是涉及到具体数值运算时用 μ_0 代替 μ 。

按照激发形式的不同和传播介质及其边界条件的限制，电磁波的场强 $\vec{E}(\vec{r})$ 和 $\vec{H}(\vec{r})$ 可以有各种不同的形式。单色平面电磁波是电磁波的最单纯、最基本的理想形式，其特征是等相位面为平面，电磁波有确定的传播方向。场量可表示为

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i\omega t - i\vec{K} \cdot \vec{r}} \quad (1.3-3a)$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}_0 e^{i\omega t - i\vec{K} \cdot \vec{r}} \quad (1.3-3b)$$

式中, \vec{E}_0 、 \vec{H}_0 为振幅矢量, \vec{K} 为波矢, 其方向为波的传播方向。将上面二式代入基本方程式 (1.3-2a) 和式 (1.3-2b), 得

$$\vec{K} \times \vec{E}_0 = \omega \mu \vec{H}_0 \quad (1.3-4a)$$

$$\vec{K} \times \vec{H}_0 = -\omega \varepsilon \vec{E}_0 \quad (1.3-4b)$$

可见平面电磁波的 \vec{K} 、 \vec{E} 、 \vec{H} 三矢量彼此正交, 进而说明均匀介质中的平面电磁波是横电磁波 (TEM 波)。由上式可得

$$K E_0 = \omega \mu H_0 \quad (1.3-5a)$$

$$K H_0 = \omega \varepsilon E_0 \quad (1.3-5b)$$

将式 (1.3-5a) 与式 (1.3-5b) 相除, 得

$$\frac{E_0}{H_0} = \frac{\mu H_0}{\varepsilon E_0} \quad (1.3-6)$$

$$\frac{E_0}{H_0} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad (1.3-7)$$

式中, $\sqrt{\mu/\varepsilon}$ 为介质的波阻抗, 用 Z 表示, 也可以写作 $Z=Z_0/n$, 其中 $Z_0=\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}=376.7\Omega$, 称作真空波阻抗。

将式 (1.3-5a) 与式 (1.3-5b) 相乘, 得

$$K^2 = \omega^2 \mu \varepsilon = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 n^2 \quad (1.3-8)$$

或者

$$K = n \frac{\omega}{c} = n K_0 \quad (1.3-9)$$

$$K_0 = \omega/c = 2\pi/\lambda \quad (1.3-10)$$

λ 和 K_0 分别代表电磁波在真空中的波长和波数。

1.4 坡印亭矢量和传输功率

电磁场的瞬态能量密度为

$$w = \frac{1}{2} \varepsilon E^2(\vec{r}, t) + \frac{1}{2} \mu H^2(\vec{r}, t) \quad (1.4-1)$$

电磁波传输的能流密度, 即单位时间内通过单位面积的能量, 由坡印亭 (Poynting) 矢量表示为

$$\vec{S} = \vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{H}(\vec{r}, t) \quad (1.4-2)$$

对式 (1.3-1) 表示的单色电磁波, 因为含有时间因子项 $e^{i\omega t}$, 所以上式表示的是电磁场的瞬态能流密度。为了得到实际能流密度, 需要进行适当的时间平均。现有电磁理论中, \vec{E} 和 \vec{H} 除时间因子外, $E(\vec{r})$ 和 $H(\vec{r})$ 也往往用复数形式表示, 所以对它们的二次形式的运算必须进行实数化处理, 将式 (1.4-2) 写作

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \text{Re}[\vec{E}(\vec{r}, t)] \times \text{Re}[\vec{H}(\vec{r}, t)] \\ &= \frac{1}{2} [\vec{E}(\vec{r}) e^{i\omega t} + \vec{E}^*(\vec{r}) e^{-i\omega t}] \times \frac{1}{2} [\vec{H}(\vec{r}) e^{i\omega t} + \vec{H}^*(\vec{r}) e^{-i\omega t}] \end{aligned} \quad (1.4-3)$$

注意到在式 (1.4-3) 展开式的 4 项中, $\vec{E} \times \vec{H}$ 和 $\vec{E}^* \times \vec{H}^*$ 两项分别含有 $e^{i2\omega t}$ 和 $e^{-i2\omega t}$ 因子, 因而时间平均值为零, 所以可得到平均能流密度

$$\bar{\vec{S}} = \frac{1}{4} [\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}^*(\vec{r}) + \vec{E}^*(\vec{r}) \times \vec{H}(\vec{r})]$$

$$= \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}^*(\vec{r})] \quad (1.4-4)$$

这也是文献中经常引用的公式。单位时间通过某曲面 S 的能流，即通过 S 面的传输功率为

$$P = \iint_S \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}^*(\vec{r})] \cdot \vec{n} dS \quad (1.4-5)$$

在直角坐标系中，当光波沿 z 轴传播时，坡印亭矢量只有 z 分量。光强可表示为

$$I = |\vec{S}_z| = \frac{1}{2} \text{Re}[E_x(x, y)H_y^*(x, y) - E_y(x, y)H_x^*(x, y)] \quad (1.4-6)$$

传输功率的表达式为

$$P = \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \text{Re}(E_x H_y^* - E_y H_x^*) dx dy \quad (1.4-7)$$

对于单色平面波，平均能量密度为

$$\bar{w} = \frac{1}{4} \varepsilon E_0^2 + \frac{1}{4} \mu H_0^2 = \frac{1}{2} \varepsilon E_0^2 \quad (1.4-8)$$

平均能流密度和光强分别为

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{E}_0 \times \vec{H}_0 \quad (1.4-9)$$

$$I = \frac{1}{2} E_0 H_0 = \frac{\bar{w} c}{n} \quad (1.4-10)$$

1.5 亥姆霍兹方程

在各向同性的线性光学介质中，考虑到非均匀情况，介电常数 ε 依赖于空间位置，即 $\varepsilon = \varepsilon(\vec{r})$ ，但磁导率 μ 总是近似等于真空磁导率 μ_0 。为得到 \vec{E} 和 \vec{H} 各自独立的方程，对与时间无关的基本方程式 (1.3-2a)： $\nabla \times \vec{E} = -i\omega\mu\vec{H}$ 和式 (1.3-2b)： $\nabla \times \vec{H} = i\omega\varepsilon\vec{E}$ 进行微分运算，得

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -i\omega\mu\nabla \times \vec{H} \quad (1.5-1a)$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{H} = i\omega\nabla \times \varepsilon\vec{E} \quad (1.5-1b)$$

再利用矢量微分公式： $\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$ ，将上面二式化为

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = K^2 \vec{E} \quad (1.5-2a)$$

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{H}) - \nabla^2 \vec{H} = i\omega\varepsilon\nabla \times \vec{E} + i\omega\nabla \varepsilon \times \vec{E} \quad (1.5-2b)$$

同时注意到 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ ，则有 $\nabla \cdot \vec{H} = 0$ 。再由 $\nabla \cdot \vec{D} = 0$ ，可得

$$\nabla \cdot \varepsilon \vec{E} = \nabla \varepsilon \cdot \vec{E} + \varepsilon \nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = -\frac{\nabla \varepsilon}{\varepsilon} \cdot \vec{E} = -\frac{\nabla \varepsilon_r}{\varepsilon_r} \cdot \vec{E} \quad (1.5-3)$$

由此得到非均匀介质中关于电场和磁场的独立的微分方程，即亥姆霍兹(Helmholtz)方程

$$\nabla^2 \vec{E} + n^2 K_0^2 \vec{E} + \nabla \left(\frac{\nabla \varepsilon_r}{\varepsilon_r} \cdot \vec{E} \right) = 0 \quad (1.5-4a)$$

$$\nabla^2 \vec{H} + n^2 K_0^2 \vec{H} + \frac{\nabla \varepsilon_r}{\varepsilon_r} \times (\nabla \times \vec{H}) = 0 \quad (1.5-4b)$$

对于非均匀介质，上面两方程中含 $\nabla \varepsilon_r / \varepsilon_r$ 的附加项不能随意舍弃，由于方程的复杂性，求解是很困难的。但在研究光波导中的光传输特性时，所涉及的介质要么分区均匀，要么介质折射率或相对介电常数随空间位置变化缓慢。当介质均匀时， $\nabla \varepsilon_r = 0$ ，式 (1.5-4) 简化为

$$\nabla^2 \vec{E} + n^2 K_0^2 \vec{E} = 0 \quad (1.5-5a)$$

$$\nabla^2 \vec{H} + n^2 K_0^2 \vec{H} = 0 \quad (1.5-5b)$$

这是标准的常系数亥姆霍兹方程。当介质缓慢变化时，如在电磁场的波长 λ 范围内，满足条件 $|\nabla \varepsilon_r / \varepsilon_r| \lambda \ll 1$ ，这种介质称作缓变介质。以方程(1.5-4b)为例，比较第三项与第二项的大小，因为一般空间矢量算符 ∇ 作用于某一场量时，形式上可等效于 $i\vec{K}$ 对场量作用，由此，两项大小之比为

$$\frac{|\nabla \varepsilon_r \times (\nabla \times \vec{H}) / \varepsilon_r|}{n^2 K_0^2 H} \leq \frac{|\nabla \varepsilon_r K / \varepsilon_r|}{n^2 K_0^2} = \frac{|\nabla \varepsilon_r|}{\varepsilon_r n K_0} = \frac{|\nabla \varepsilon_r| \lambda}{\varepsilon_r} \frac{1}{2\pi n}$$

方程(1.5-4a)的第三项与第二项大小之比也有同样的结果。可见，对缓变介质，这一比值一般小于 10^{-2} 。实际波导和光纤，介质的非均匀性通常满足缓变条件，所以，忽略式(1.5-4)两个方程中的最后一项，仍可保持较高精度的近似。从而得到变系数的亥姆霍兹方程

$$\nabla^2 \vec{E} + n^2(\vec{r}) K_0^2 \vec{E} = 0 \quad (1.5-6a)$$

$$\nabla^2 \vec{H} + n^2(\vec{r}) K_0^2 \vec{H} = 0 \quad (1.5-6b)$$

1.6 平面电磁波的反射和折射

电磁波入射到介质分界面时，将发生反射和折射现象。如图 1.2 所示，设电磁波以入射角 α 从介质 1 射向介质 2， $x=0$ 平面为分界面，反射角为 α' ，折射角为 γ 。入射波、反射波和折射波三个平面波分别表示为

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{10} e^{-i\vec{K}_1 \cdot \vec{r}}, \quad \vec{E}_2 = \vec{E}_{20} e^{-i\vec{K}_2 \cdot \vec{r}}, \quad \vec{E}_3 = \vec{E}_{30} e^{-i\vec{K}_3 \cdot \vec{r}}$$

根据边界条件式(1.2-3a)，有

$$\vec{n} \times (\vec{E}_{10} e^{-i\vec{K}_1 \cdot \vec{r}} + \vec{E}_{20} e^{-i\vec{K}_2 \cdot \vec{r}}) = \vec{n} \times \vec{E}_{30} e^{-i\vec{K}_3 \cdot \vec{r}} \quad (1.6-1)$$

由于 $\vec{K} \cdot \vec{r} = K_x x + K_y y + K_z z$ ，特别地，在 $x=0$ 界面上， $\vec{K} \cdot \vec{r} = K_y y + K_z z$ 。若要求在 $x=0$ 平面上满足式(1.6-1)，即电场强度 \vec{E} 的切向分量在 $x=0$ 平面上处处保持连续，必有

$$K_{1y} = K_{2y} = K_{3y} \quad (1.6-2)$$

$$K_{1z} = K_{2z} = K_{3z} \quad (1.6-3)$$

如入射波矢在 xOz 平面内，则 $K_{1y} = K_{2y} = K_{3y} = 0$ ，说明入射波、反射波和折射波在同一平面内。

由式(1.6-3)很容易得出 $\alpha = \alpha'$ ， $n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \gamma$ ，即所熟知的反射定律和折射定律。

由上述结果，简化式(1.6-1)，得

$$\vec{n} \times \vec{E}_{10} + \vec{n} \times \vec{E}_{20} = \vec{n} \times \vec{E}_{30} \quad (1.6-4)$$

同样，根据磁场强度 \vec{H} 的切向分量处处保持连续的边界条件式(1.2-3b)，有

$$\vec{n} \times \vec{H}_{10} + \vec{n} \times \vec{H}_{20} = \vec{n} \times \vec{H}_{30} \quad (1.6-5)$$

由于每一束平面电磁波都有两个独立的偏振态，下面按两种偏振状态分别处理。如图 1.2 所示，一种为电场振动方向垂直于入射面，称 TE 偏振；一种为磁场振动方向垂直于入射面，称 TM 偏振。

- 当电磁波呈 TE 偏振态时， \vec{E} 矢量垂直于入射面，电场切向分量 E_y 和磁场切向分量 H_z 连续，因此

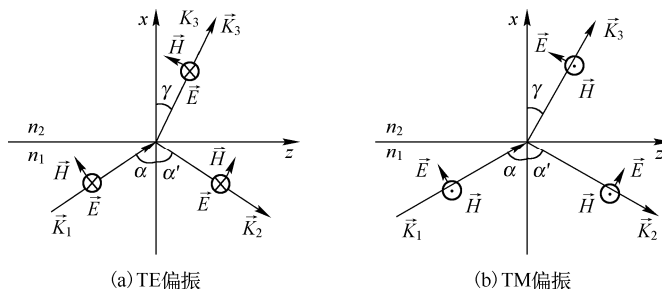


图 1.2 电磁波在介质界面上的反射与折射

$$E_{10} + E_{20} = E_{30} \quad (E_y \text{ 连续}) \quad (1.6-6)$$

$$H_{10} \cos \alpha - H_{20} \cos \alpha = H_{30} \cos \gamma \quad (H_z \text{ 连续}) \quad (1.6-7)$$

根据式(1.3-7), $E_0/H_0 = \sqrt{\mu/\epsilon}$, 且 $\mu = \mu_0$, 式(1.6-7)可写成

$$n_1 E_{10} \cos \alpha - n_1 E_{20} \cos \alpha = n_2 E_{30} \cos \gamma \quad (1.6-8)$$

由式(1.6-6)和式(1.6-8)可得 TE 偏振下的反射系数和折射系数, 分别为

$$r_{\text{TE}} = \frac{E_{20}}{E_{10}} = \frac{n_1 \cos \alpha - n_2 \cos \gamma}{n_1 \cos \alpha + n_2 \cos \gamma} = -\frac{\sin(\alpha - \gamma)}{\sin(\alpha + \gamma)} \quad (1.6-9)$$

$$t_{\text{TE}} = \frac{E_{30}}{E_{10}} = \frac{2n_1 \cos \alpha}{n_1 \cos \alpha + n_2 \cos \gamma} = \frac{2 \cos \alpha \sin \gamma}{\sin(\alpha + \gamma)} \quad (1.6-10)$$

- 当电磁波呈 TM 偏振态时, \vec{H} 矢量垂直于入射面, 磁场切向分量 H_y 和电场切向分量 E_z 连续, 因此

$$H_{10} + H_{20} = H_{30} \quad (H_y \text{ 连续}) \quad (1.6-11)$$

$$E_{10} \cos \alpha - E_{20} \cos \alpha = E_{30} \cos \gamma \quad (E_z \text{ 连续}) \quad (1.6-12)$$

同样根据 $E_0/H_0 = \sqrt{\mu/\epsilon}$, 式(1.6-11)可写成

$$n_1 E_{10} + n_1 E_{20} = n_2 E_{30} \quad (1.6-13)$$

由式(1.6-12)和式(1.6-13)可得 TM 偏振下的反射系数和折射系数, 分别为

$$r_{\text{TM}} = \frac{E_{20}}{E_{10}} = \frac{n_2 \cos \alpha - n_1 \cos \gamma}{n_2 \cos \alpha + n_1 \cos \gamma} = \frac{\tan(\alpha - \gamma)}{\tan(\alpha + \gamma)} \quad (1.6-14)$$

$$t_{\text{TM}} = \frac{E_{30}}{E_{10}} = \frac{2n_1 \cos \alpha}{n_2 \cos \alpha + n_1 \cos \gamma} = \frac{2 \cos \alpha \sin \gamma}{\sin(\alpha + \gamma) \cos(\alpha - \gamma)} \quad (1.6-15)$$

上述表示入射波、反射波及折射波的振幅关系的公式称为菲涅耳(Fresnel)公式, 两种偏振状态下的反射率和透射率分别为

$$R_{\text{TE}} = |r_{\text{TE}}|^2 \quad (1.6-16)$$

$$T_{\text{TE}} = |t_{\text{TE}}|^2 \quad (1.6-17)$$

$$R_{\text{TM}} = |r_{\text{TM}}|^2 \quad (1.6-18)$$

$$T_{\text{TM}} = |t_{\text{TM}}|^2 \quad (1.6-19)$$

并且对 TE 和 TM 偏振, 均有

$$R + T = 1 \quad (1.6-20)$$

1.7 光的全反射与倏逝波

设两种介质的折射率分别为 n_1 和 n_2 , 光波由介质 1 向介质 2 入射时, 若 $n_1 > n_2$, 根据折射定律, 折射角 γ 将大于入射角 α 。当 $\gamma = 90^\circ$ 时, 入射角

$$\alpha_c = \arcsin \frac{n_2}{n_1} \quad (1.7-1)$$

若入射角再增大，折射角将失去实数意义，折射光波会表现出不同于一般折射光波的物理特性。这时反射率 $R=1$ ，所以称作全反射。 α_c 为全反射临界角，产生全反射的条件是 $\alpha > \alpha_c$ 。

入射光、反射光、折射光三个光束的相应波数分别是 $K_1 = n_1 K_0$ 、 $K_2 = n_1 K_0$ 、 $K_3 = n_2 K_0$ 。发生全反射时，介质分界面两侧电磁场的边值关系仍然成立，这里分析折射光波的波矢分量，由式 (1.6-3) 得

$$K_{3z} = K_{1z} = n_1 K_0 \sin \alpha \quad (1.7-2)$$

$$K_{3x} = \sqrt{K_3^2 - K_{3z}^2} = K_0 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \alpha} \quad (1.7-3)$$

当发生全反射时， $\sin \alpha > n_2/n_1$ ，所以 K_{3x} 为虚数，即

$$K_{3x} = \pm i K_0 \sqrt{n_1^2 \sin^2 \alpha - n_2^2} = \pm i K_0 \delta \quad (1.7-4)$$

其中

$$\delta = \sqrt{n_1^2 \sin^2 \alpha - n_2^2} \quad (1.7-5)$$

此时折射光可表示为

$$\vec{E}_3(\vec{r}) = \vec{E}_{30} e^{-K_0 \delta x} e^{-i K_{3z} z} \quad (1.7-6)$$

注意，这里为保证场沿 x 轴正向不为无穷大，式 (1.7-4) 取负号。所以，当 $\sin \alpha > n_2/n_1$ 时，折射光沿表面传播 (z 方向)，并在垂直表面方向 (x 方向) 迅速衰减，该折射光波被称作“倏逝波 (Evanescent wave)”，或“消逝波”、“隐逝波”、“表面波”，这时正常的折射光消失。

倏逝波在第二种介质中的透射深度，定义为在垂直表面方向振幅减小为表面处振幅的 $1/e$ 的距离，即

$$d = \frac{1}{K_0 \delta} = \frac{\lambda}{2\pi \sqrt{n_1^2 \sin^2 \alpha - n_2^2}} \quad (1.7-7)$$

1.8 全反射相移与古斯-汉森位移

全反射条件下，菲涅耳公式不成立， $\cos \gamma$ 不存在，因此反射光束和入射光束之间的关系也必须重新确定。仍采用图 1.2 的坐标系，设入射面为 xOz 平面，下面分别讨论两种偏振状态。

TE 偏振下，电磁波的场分量只有 E_y 、 H_x 、 H_z ，其余分量均为零。根据切向分量连续的边界条件，有

$$E_{1y} + E_{2y} = E_{3y} \quad (1.8-1)$$

$$H_{1z} + H_{2z} = H_{3z} \quad (1.8-2)$$

由平面波方程式 (1.3-4a)： $\vec{K} \times \vec{E} = \omega \mu \vec{H}$ ，得

$$K_x E_y = \omega \mu H_z \quad (1.8-3)$$

将该式代入式 (1.8-2)，得

$$K_{1x} E_{1y} + K_{2x} E_{2y} = K_{3x} E_{3y} \quad (1.8-4)$$

其中 $K_{1x} = n_1 K_0 \cos \alpha$ ， $K_{2x} = -n_1 K_0 \cos \alpha$ ，并且

$$K_{3x} = -i K_0 \delta \quad (1.8-5)$$

由此可得

$$n_1 K_0 \cos \alpha (E_{1y} - E_{2y}) = -i K_0 \delta (E_{1y} + E_{2y})$$

所以，全反射条件下的反射系数为

$$\frac{E_{2y}}{E_{1y}} = \frac{n_1 \cos \alpha + i\delta}{n_1 \cos \alpha - i\delta} = \frac{e^{i\phi_{TE}}}{e^{-i\phi_{TE}}} = e^{i2\phi_{TE}} \quad (1.8-6)$$

其中

$$\phi_{TE} = \arctan \frac{\delta}{n_1 \cos \alpha} \quad (1.8-7)$$

即

$$\phi_{TE} = \arctan \frac{\sqrt{\sin^2 \alpha - n_2^2 / n_1^2}}{\cos \alpha} \quad (1.8-8)$$

上述推导表明反射波与入射波振幅相等，相位差为 $2\phi_{TE}$ 。所以 TE 偏振下全反射相移为

$$\Gamma = 2\phi_{TE} \quad (1.8-9)$$

TM 偏振下，电磁波的场分量只有 H_y 、 E_x 、 E_z ，其余分量均为零。同样根据切向分量连续的边界条件，有

$$H_{1y} + H_{2y} = H_{3y} \quad (1.8-10)$$

$$E_{1z} + E_{2z} = E_{3z} \quad (1.8-11)$$

由平面波方程式 (1.3-4b)： $\vec{K} \times \vec{H} = -\omega \epsilon \vec{E}$ ，得

$$K_x H_y = -\omega \epsilon_0 n^2 E_z \quad (1.8-12)$$

将该式代入式 (1.8-11)，得

$$\frac{1}{n_1^2} K_{1x} H_{1y} + \frac{1}{n_1^2} K_{2x} H_{2y} = \frac{1}{n_2^2} K_{3x} H_{3y} \quad (1.8-13)$$

结合式 (1.8-10)，有

$$n_1 K_0 \cos \alpha (H_{1y} - H_{2y}) = -i K_0 \delta \frac{n_1^2}{n_2^2} (H_{1y} + H_{2y}) \quad (1.8-14)$$

从而得到 TM 偏振波在全反射条件下的反射系数

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{H_{2y}}{H_{1y}} = \frac{n_1 \cos \alpha + i\delta n_1^2 / n_2^2}{n_1 \cos \alpha - i\delta n_1^2 / n_2^2} = \frac{e^{i\phi_{TM}}}{e^{-i\phi_{TM}}} = e^{i2\phi_{TM}} \quad (1.8-15)$$

其中

$$\phi_{TM} = \arctan \frac{n_1^2}{n_2^2} \frac{\delta}{n_1 \cos \alpha} \quad (1.8-16)$$

即

$$\phi_{TM} = \arctan \left(\frac{n_1^2}{n_2^2} \frac{\sqrt{\sin^2 \alpha - n_2^2 / n_1^2}}{\cos \alpha} \right) \quad (1.8-17)$$

同样表明反射波与入射波振幅相等，相位差为 $2\phi_{TM}$ 。所以 TM 偏振下全反射相移为

$$\Gamma = 2\phi_{TM} \quad (1.8-18)$$

全反射相移 Γ 与入射角 α 有关，图 1.3 示出了在几种确定折射率比的情况下，两种偏振状态 Γ 对 α 的依赖关系：入射角从全反射临界角增至 90° ，全反射相移从 0 增至 π 。

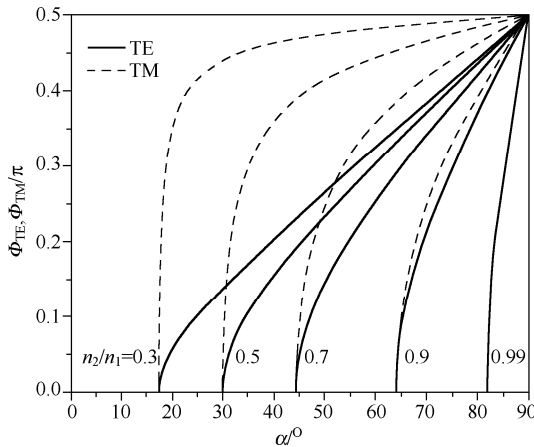


图 1.3 全反射相移与入射角的关系

前面的分析，都是认为光束的反射点与入射点在同一位置，然而 Goos 和 Hänchen 通过实验精确测出全反射光线的位置，发现并不像通常认为的那样，而是沿表面产生了一个位移 Δz ，从而使反射光线产生一侧向位移 D ，如图 1.4 所示，这一位移 D 称作古斯-汉森(Goos-Hänchen)位移。位移的大小与入射角和偏振状态有关，是波长的量级。

上面已经给出了全反射相移 Γ ，进一步应用电磁波理论可以证明

$$\Delta z = \frac{\partial \Gamma}{\partial \beta} \quad (1.8-19)$$

式中， $\beta = n_1 k_0 \sin \alpha$ 。设 $n_{21} = n_2 / n_1$ ，那么 TE 和 TM 偏振的 Goos-Hänchen 位移分别为

$$D_{\text{TE}} = \frac{\lambda_1}{\pi} \frac{\sin \alpha}{\sqrt{\sin^2 \alpha - n_{21}^2}} \quad (1.8-20)$$

$$D_{\text{TM}} = \frac{n_{21}^2}{(1 + n_{21}^2) \sin^2 \alpha - n_{21}^2} D_{\text{TE}} \quad (1.8-21)$$

在入射角接近全反射临界角时，Goos-Hänchen 位移最大，随入射角的增大而快速减小，如图 1.5 所示。可以这样理解全反射时的光线传播：入射光线穿过界面一定深度，在第二种介质中的某虚平面上进行无相移的全反射，导致实际界面以上的反射点与入射点有一距离。从中还可以得出光线的入射深度

$$d = \frac{1}{2} \Delta z \cdot \cot \alpha = \frac{\lambda}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{n_1^2 \sin^2 \alpha - n_2^2}} \quad (1.8-22)$$

这和倏逝波的穿透深度[式(1.7-7)]刚好是一致的。实际上，全反射相移和 Goos-Hänchen 位移以及倏逝波是紧密相关的，在波导和光纤理论、金属表面波、近场光学中均有广泛的应用。

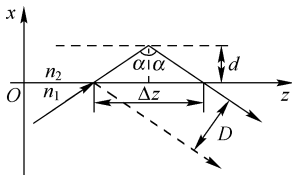


图 1.4 Goos-Hänchen 位移

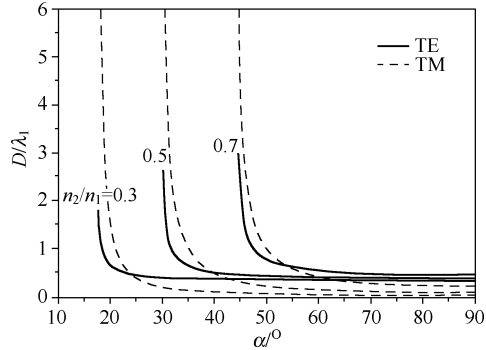


图 1.5 Goos-Hänchen 位移与入射角的关系

习题

1-1 基本概念：波矢，波数，波阻抗，缓变介质，坡印亭矢量，电磁波能量密度，能流密度，光强，倏逝波，穿透深度，全反射相移，古斯-汉森位移。

1-2 设单色电磁波的场为 $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})e^{i\omega t}$ ， $\vec{H} = \vec{H}(\vec{r})e^{i\omega t}$ ，写出关于 $\vec{E}(\vec{r})$ 和 $\vec{H}(\vec{r})$ 的 Maxwell 方程的矢量形式和分量形式。

1-3 推导菲涅耳公式。

1-4 分别推导 TE 偏振波和 TM 偏振波的全反射相移。

1-5 讨论全反射相移与古斯-汉森位移之间的关系。

第2章 几何光学

几何光学和波动光学都是研究光的传播特性的理论和方法，几何光学具有直观形象、概念清晰、方法简单的优点，而基于电磁波理论的波动光学则具有分析严密、计算精确、适用面广的优点，但方法繁杂、直观性差。两种理论在光波导研究中都有重要应用，需要互相结合和补充。

目前已普遍认为几何光学是电磁波理论在短波长极限条件下的近似。当波长远小于系统的尺寸时，可以忽略光波的衍射效应，而把光的传播作为直线或曲线处理。几何光学中，光线被定义为一条直线或曲线，它在每一点的切线方向与光波等相位面正交。

2.1 程函方程

程函方程(eikonal 方程)是几何光学的基本方程，为了证实几何光学与光的电磁理论的内在联系，本节将从 Maxwell 方程出发推程函方程。

第1章介绍了适用于单色光的 Maxwell 方程的约化形式，即

$$\nabla \times \vec{E} = -i\omega\mu\vec{H} \quad (2.1-1a)$$

$$\nabla \times \vec{H} = i\omega\varepsilon\vec{E} \quad (2.1-1b)$$

在均匀介质中该方程存在平面波特解

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0 e^{-i\vec{K} \cdot \vec{r}} \quad (2.1-2a)$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \vec{H}_0 e^{-i\vec{K} \cdot \vec{r}} \quad (2.1-2b)$$

这些表达式中已省略了固定的时间变化因子 $e^{i\omega t}$ 。

一般情况下，对于方程式(2.1-1)，需要找到既能适用于非均匀介质又能在均匀介质条件下回归平面波的具有普遍意义的形式解，一般采取如下形式

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0(\vec{r}) e^{-iK_0\psi(\vec{r})} \quad (2.1-3a)$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \vec{H}_0(\vec{r}) e^{-iK_0\psi(\vec{r})} \quad (2.1-3b)$$

这种解与平面波相似，不同点是振幅矢量 $\vec{E}_0(\vec{r})$ 和 $\vec{H}_0(\vec{r})$ 都是待定的空间分布函数，而相位部分也用待定函数代替，其中 $\psi(\vec{r})$ 代表光程，称为程函数。将式(2.1-3)代入方程式(2.1-1)，可得

$$\nabla \times \vec{E}_0(\vec{r}) - iK_0 \nabla \psi(\vec{r}) \times \vec{E}_0(\vec{r}) = -i\omega\mu\vec{H}_0(\vec{r}) \quad (2.1-4a)$$

$$\nabla \times \vec{H}_0(\vec{r}) - iK_0 \nabla \psi(\vec{r}) \times \vec{H}_0(\vec{r}) = i\omega\varepsilon\vec{E}_0(\vec{r}) \quad (2.1-4b)$$

现在对式(2.1-4)进行短波长近似处理。通常可见光与近红外光的波长为 $1\mu\text{m}$ 量级，因而空间频率 $K_0(=2\pi/\lambda)$ 非常大，这意味着场变量的振荡是非常迅速的。但是，相比之下，场变量的振幅却是十分缓慢变化的，在波长范围内振幅的变化是十分微小的，即 $|\Delta\vec{E}_0|/|\vec{E}_0| \ll 1$ ，这是短波长的必然结果。基于以上考虑，对式(2.1-4a)和式(2.1-4b)的前二项进行量级估计，第一项 $\nabla \times \vec{E}_0$ 的量级等同于导数 $\left| \frac{\partial \vec{E}_0}{\partial x} \right|$ ，第二项的量级为 $|K_0 \vec{E}_0|$ ，二者之比

$$\frac{1}{2\pi|\vec{E}_0|} \left| \frac{\partial \vec{E}_0}{\partial x} \right| \lambda \approx \frac{|\Delta\vec{E}_0|}{2\pi|\vec{E}_0|} \ll 1 \quad (2.1-5)$$

这样在短波长近似下，式(2.1-4)中振幅矢量的旋度一项应予忽略，从而得到

$$K_0 \nabla \psi \times \vec{E}_0 = \omega \mu \vec{H}_0 \quad (2.1-6a)$$

$$K_0 \nabla \psi \times \vec{H}_0 = -\omega \varepsilon \vec{E}_0 \quad (2.1-6b)$$

显而易见，三矢量 $\nabla \psi$ 、 \vec{E}_0 、 \vec{H}_0 互相正交，由此可得

$$K_0 |\nabla \psi| \cdot |\vec{E}_0| = \omega \mu |\vec{H}_0| \quad (2.1-7a)$$

$$K_0 |\nabla \psi| \cdot |\vec{H}_0| = \omega \varepsilon n^2 |\vec{E}_0| \quad (2.1-7b)$$

两式相乘化简得到

$$|\nabla \psi| = n \quad (2.1-8)$$

方程式(2.1-8)是摆脱繁杂的场变量，仅含单一光程函数 ψ 的光传播方程，称为程函方程，它是几何光学的基本方程。

2.2 光传播路径分析

2.2.1 光线方程

几何光学始终以光线为研究对象，因而也称为光线光学或射线光学。为了建立能够描述光线行为的方程，一种自然的思路是从光线的定义出发，依据光线处处与光波的等相位面正交的特点来寻求光线方程，以解决我们关心的光传播路径问题。

由程函方程 $|\nabla \psi| = n(\vec{r})$ 可知，等相位面就是程函数 ψ 的等值面，因而梯度矢量 $\nabla \psi$ 必然指向等相位面的法线方向。设法线方向的单位矢量为 \vec{S}_0 ，则

$$\nabla \psi = n \vec{S}_0 \quad (2.2-1)$$

对于任意一条空间曲线，如图 2.1 所示，若以 dS 表示线段微分，以 $d\vec{r}$ 表示位置矢量微分，则导数 $d\vec{r}/dS$ 表示该曲线某点的切线方向单位矢量。光线是一条与等相位面正交的特殊曲线，必然要求其切线方向与等相位面法线方向一致，即

$$\frac{d\vec{r}}{dS} = \vec{S}_0 \quad (2.2-2)$$

因而

$$\nabla \psi = n \frac{d\vec{r}}{dS} \quad (2.2-3)$$

对上式取 \vec{S}_0 方向的分量

$$\vec{S}_0 \cdot \nabla \psi = n \quad (2.2-4)$$

即

$$\frac{d\psi}{dS} = n \quad (2.2-5)$$

对上式做梯度运算

$$\nabla \frac{d\psi}{dS} = \nabla n \quad (2.2-6)$$

$$\frac{d}{dS} \nabla \psi = \nabla n \quad (2.2-7)$$

将式(2.2-3)代入，得

$$\frac{d}{dS} \left(n \frac{d\vec{r}}{dS} \right) = \nabla n \quad (2.2-8)$$

该方程称作光线方程，是研究介质中光的几何传播特性的重要方程。它将光线轨迹(由 \vec{r} 描述)和空间折射率分布 $n(\vec{r})$ 联系起来，由光线方程可以直接求出光线轨迹表达式。

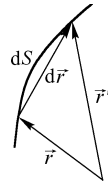


图 2.1 光线微分几何

2.2.2 光线方程应用举例

(1) 均匀介质中的光线

在均匀介质中， n 为常数， $\nabla n = 0$ ，因而

$$\frac{d}{dS} \left(n \frac{d\vec{r}}{dS} \right) = 0$$

即有

$$\frac{d\vec{r}}{dS} = \text{常矢量}$$

设光线起点位置为 \vec{r}_0 ，切向导数 $\frac{d\vec{r}}{dS} = \vec{a}$ ， $|\vec{a}|=1$ ，积分得到

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + S\vec{a}$$

这正是所期待的直线方程。

(2) 一维非均匀介质中的光线

设非均匀介质折射率 $n = n_0(1 + \alpha x)$ ，光线初始端坐标为 $(0, 0, 0)$ ，方向沿 z 轴正方向，那么光线方程的分量形式为

$$\frac{d}{dS} \left(n \frac{dx}{dS} \right) = \alpha n_0 \quad (2.2-9)$$

$$\frac{d}{dS} \left(n \frac{dy}{dS} \right) = 0 \quad (2.2-10)$$

$$\frac{d}{dS} \left(n \frac{dz}{dS} \right) = 0 \quad (2.2-11)$$

由式 (2.2-10) 可知， $n \frac{dy}{dS}$ 为常数。由于初始时光线在 xOz 面内，且 $\frac{dy}{dS} = 0$ ，所以此常数为零，则光线传播时保持 $\frac{dy}{dS} = 0$ 不变，即 y 为常数，说明光线是一平面曲线，根据初始条件有 $y=0$ 。

由式 (2.2-11) 可知， $n \frac{dz}{dS}$ 为常数。由于初始时刻 $\frac{dz}{dS} = 1$ ，所以此常数为 n_0 ，则光线传播过程中遵循 $\frac{dz}{dS} = \frac{n_0}{n}$ 。利用该关系式，对式 (2.2-9) 做导数变换

$$\frac{d}{dS} = \frac{dz}{dS} \frac{d}{dz} = \frac{n_0}{n} \frac{d}{dz}$$

得

$$\frac{d^2x}{dz^2} = \alpha(1 + \alpha x) \quad (2.2-12)$$

该方程有严格解，即

$$x = \frac{1}{\alpha} \left[\frac{1}{2} e^{\alpha z} + \frac{1}{2} e^{-\alpha z} - 1 \right]$$

或

$$x = \frac{1}{\alpha} [\text{ch}(\alpha z) - 1]$$

此双曲余弦函数在 $\alpha z \ll 1$ 的情况下，可近似为

$$x = \frac{1}{2} \alpha z^2$$

光线近似为抛物线，如图 2.2 所示。结果表明光线在非均匀介质中传播时，总会向高折射率的区域弯曲。

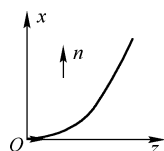


图 2.2 非均匀介质中光线的偏转

2.3 费马原理

最初的程函方程和光线方程，并非由电磁理论推导得出，而是根据费马(Fermat)原理通过变分法得到的。费马原理指出：通过介质中任意两点的光线必定是光程最短的曲线。费马原理的数学表述可归结为固定端点曲线族的变分问题。

如图 2.3 所示， A 、 B 两点间任意路径的光程定义为

$$L = \int_A^B n dS \quad (2.3-1)$$

根据费马原理，光程最短时，光程的变分为零，即有

$$\delta L = \delta \int_A^B n dS = \delta \int_A^B n \frac{d\vec{r}}{dS} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (2.3-2)$$

因为 $\frac{d\vec{r}}{dS}$ 为单位矢量，所以有 $\frac{d\vec{r}}{dS} \cdot d\vec{S} = dS$ 。对式 (2.3-2) 进行分解运算

$$\int_A^B \delta n \frac{d\vec{r}}{dS} \cdot d\vec{S} + \int_A^B n \delta \frac{d\vec{r}}{dS} \cdot d\vec{S} + \int_A^B n \frac{d\vec{r}}{dS} \cdot \delta d\vec{S} = 0 \quad (2.3-3)$$

上式中，第一项：因为 $\delta n = \delta \vec{r} \cdot \nabla n$ ，所以， $I_1 = \int_A^B \delta \vec{r} \cdot \nabla n dS$ 。

第二项：由于 $\frac{d\vec{r}}{dS}$ 为单位矢量， $\delta \frac{d\vec{r}}{dS} \cdot d\vec{S} = 0$ ，所以 $I_2 = 0$ 。

第三项：由图 2.3 可得

$$d\vec{S} + \delta \vec{r}' = \delta \vec{r} + d\vec{S}', \quad \delta \vec{r}' - \delta \vec{r} = d\vec{S}' - d\vec{S}$$

故有 $d\delta \vec{r} = \delta d\vec{S}$ 。对式 (2.3-3) 式的第三项做分部积分，并注意到在 A、B 端点 $\delta \vec{r} = 0$ ，有

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_A^B n \frac{d\vec{r}}{dS} \cdot d\delta \vec{r} = n \frac{d\vec{r}}{dS} \cdot \delta \vec{r} \Big|_A^B - \int_A^B \delta \vec{r} \cdot d \left(n \frac{d\vec{r}}{dS} \right) \\ I_3 &= - \int_A^B \delta \vec{r} \cdot \frac{d}{dS} \left(n \frac{d\vec{r}}{dS} \right) dS \end{aligned}$$

对式 (2.3-3) 的三项求和，得

$$\int_A^B \delta \vec{r} \cdot \left[\nabla n - \frac{d}{dS} \left(n \frac{d\vec{r}}{dS} \right) \right] dS = 0 \quad (2.3-4)$$

上式中 $\delta \vec{r}$ 是任意的变分元，因此要求方括号内的表达式必须为零，即得到式 (2.2-8)。所以，通过费马原理同样可以导出光线方程。

费马原理、程函方程和光线方程都是几何光学分析中常用的基本理论，而光线方程更加实用，可直接用于解决介质中光的传播轨迹问题。

习题

2-1 基本概念：短波长近似，程函数，程函方程，光线方程，费马原理。

2-2 由 Maxwell 方程，在几何光学近似下，导出光线方程。

2-3 利用变分方法由费马原理导出光线方程。

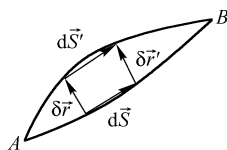


图 2.3 变分示意图

第3章 光波导几何分析

光波导由光的透明介质制成，横向将光波限制在小范围内，光可进行长距离传输，如光纤、薄膜波导、条形波导等。介质光波导中传输光的波长通常处于可见和近红外波段范围。本章将用几何光学理论分析光在薄膜波导和光纤中的传输特性。

3.1 均匀介质薄膜波导

薄膜波导是最简单的光波导类型，是集成光学的技术基础，对薄膜波导进行分析，在光波导领域具有典型意义。

(1) 波导结构

薄膜波导也称平板介质波导，最简单、最基本的均匀介质薄膜波导结构如图 3.1 所示，它是由两层低折射率介质膜和中间夹有的一层高折射率介质膜所组成的三层结构。中间一层称为芯层，折射率为 n_1 ，是光波传输的通道；下面一层称为衬底，折射率为 n_2 ；上面一层称为覆盖层，折射率为 n_3 。上下两层都是限制光线的阻挡层，在 y 方向，波导的折射率均匀，宽度可视为无限大，光只在 x 方向受约束，沿 z 方向传播，因此也被称为二维光波导。为了保证光线在芯层内传播，必须要求 n_1 大于 n_2 和 n_3 ，一般设定 $n_1 > n_2 \geq n_3$ 。

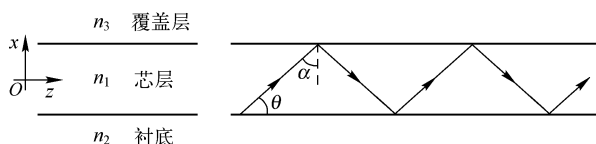


图 3.1 薄膜波导结构及其中的传输光线

(2) 波导光线

对于均匀介质波导，光线在芯层内沿直线传播，经上下界面的反射和折射形成锯齿形传播路径。波导中的光线可分为两种，满足全反射条件并且始终被束缚在芯层内的光线，称为束缚光线或导波光线；未满足全反射条件的光线称为折射光线或辐射光线，这种光线可穿过界面进入衬底或覆盖层。

(3) 导波条件

假定芯层的锯齿形光线向 z 方向传播，但是局部光线的指向却有上倾和下倾两种可能，即波矢量 \vec{K} 不是唯一确定的，其 x 方向分量 $K_{1x} = \pm n_1 K_0 \cos \alpha$ ，具有双值不确定性。然而 \vec{K} 的 z 方向分量 $K_{1z} = n_1 K_0 \sin \alpha$ 却是唯一确定的，而且在光线的传播过程中始终保持不变，这是一个重要的不变量，以 β 表示，称为传播常数

$$\beta = n_1 K_0 \sin \alpha = n_1 K_0 \cos \theta \quad (3.1-1)$$

因为导波光线必须满足界面全反射条件，即 $\sin \alpha > n_2 / n_1$ ，所以 β 必须满足以下条件

$$n_2 K_0 < \beta < n_1 K_0 \quad (3.1-2)$$

式 (3.1-2) 被称为导波条件，适用于多种类型的波导。有的书籍和文献也用有效折射率 n_{eff} (或 $\bar{\beta}$) 来描述，定义为

$$n_{\text{eff}} = \bar{\beta} = \beta / K_0 \quad (3.1-3)$$

所以导波条件也可表示为

$$n_2 < n_{\text{eff}} < n_1 \quad (3.1-4)$$

3.2 折射率渐变薄膜波导中的光线

一种实用的非均匀介质薄膜波导，其芯层折射率沿 x 方向渐变，并呈对称分布，如图 3.2 所示， $n(x) = n(-x)$ ， $n(0) = n_1$ ， $n(\pm a) = n_2$ ，芯层厚度为 $2a$ 。

函数 $n(x)$ 的具体形式有多种选择，它必须是缓变、平滑且对称的，实际设计的 $n(x)$ 的峰值和边值仅差 1% 左右，这种函数可用它的泰勒展开式代替而不会降低其精确性。如 $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \dots$ ，因为对称性， $f'(0) = 0$ ，忽略高次项，可得到具有代表性的典型抛物型折射率分布函数

$$n(x) = n_1[1 - \Delta(x/a)^2] \quad (3.2-1)$$

其中
$$\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} \approx \frac{n_1 - n_2}{n_1} \approx \frac{n_1 - n_2}{n_2} \quad (3.2-2)$$

为相对折射率差(relative refractive index contrast)，它是介质波导和光纤中的重要参数。

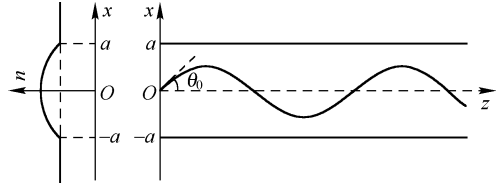


图 3.2 渐变折射率薄膜波导中的光线

基于该种折射率分布的薄膜波导，光线方程 $\frac{d}{dS}\left(n\frac{d\vec{r}}{dS}\right) = \nabla n$ 的分量形式分别为

$$z \text{ 分量} \quad \frac{d}{dS}\left(n\frac{dz}{dS}\right) = 0 \quad (3.2-3)$$

$$x \text{ 分量} \quad \frac{d}{dS}\left(n\frac{dx}{dS}\right) = \frac{dn}{dx} = -2n_1\Delta x/a^2 \quad (3.2-4)$$

设光线初始值为 $x = 0$ ， $z = 0$ ， $n(0) = n_1$ ，倾角为 θ_0 。由式 (3.2-3)，显见 $n\frac{dz}{dS}$ 为不变量，因此

$$n\frac{dz}{dS} = n\cos\theta = n_1\cos\theta_0 = \bar{\beta}$$

$$\frac{dz}{dS} = \frac{n_1}{n}\cos\theta_0$$

做变量代换，即将 $\frac{d}{dS} = \frac{dz}{dS}\frac{d}{dz} = \frac{n_1}{n}\cos\theta_0\frac{d}{dz}$ 代入式 (3.2-4)，得

$$\begin{aligned} \frac{n_1^2}{n}\cos^2\theta_0\frac{d^2x}{dz^2} &= -2n_1\Delta x/a^2 \\ \frac{d^2x}{dz^2} &= -\frac{2\Delta x[1 - \Delta(x^2/a^2)]}{a^2\cos^2\theta_0} \end{aligned} \quad (3.2-5)$$

忽略此方程的二级小量 Δ^2 项，可得

$$\frac{d^2x}{dz^2} = -p^2x \quad (3.2-6)$$

其中
$$p = \frac{\sqrt{2\Delta}}{a\cos\theta_0} \quad (3.2-7)$$

为振荡型光线的空间频率，求解方程式 (3.2-6)，得到光线曲线函数为

$$x = x_m \sin(pz) \quad (3.2-8)$$

对上述结果讨论如下。

(1) 导波光线

抛物型折射率渐变波导的光线是一组正弦曲线，曲线不需界面反射，而是自行往返，蛇行前进。只要振幅适当，不超出芯区，光线就是导波光线。这说明，不但可以利用折射率突变介质构成波导，使光线在界面折返，形成导波光线，也可以利用渐变折射率介质构成传导光线的波导。

(2) 振幅

振幅由初始条件决定。为求出振幅 x_m ，利用不变量 $n \cos \theta = n_1 \cos \theta_0$ ，对于式 (3.2-8) 表示的曲线的极值点 $x = \pm x_m$ ， $\cos \theta = 1$ ，因而 $n(x_m) = n_1 \cos \theta_0$ ，由折射率分布式 (3.2-1) 得到

$$n_1 \cos \theta_0 = n_1 [1 - \Delta (x_m / a)^2]$$

进而解出
$$x_m = a \sqrt{\frac{1 - \cos \theta_0}{\Delta}} \quad (3.2-9)$$

可见，初始入射倾角 θ_0 较大时，相应的振幅也较大。

图 3.3 示出了 θ_0 不同时，波导中光的传播路径，较大振幅的光线可传播至远离波导中心的低折射率区。

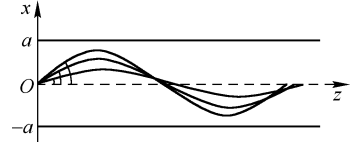


图 3.3 抛物型折射率波导中的多径光线

(3) 导波条件

式 (3.2-9) 给出了振幅 x_m 与光线入射角 θ_0 的关系，较大的 θ_0 对应较大的 x_m 。由于 x_m 会受到芯区尺寸的限制，即 $x_m < a$ ，相应地要求

$$\cos \theta_0 > 1 - \Delta \quad (3.2-10)$$

或者

$$\sin \theta_0 < \sqrt{2\Delta} \quad (3.2-11)$$

这是折射率渐变波导中导波条件的另一种表示形式。利用 $\Delta = (n_1 - n_2) / n_1$ 和 $\beta = n_1 K_0 \cos \theta_0$ ，并代入式 (3.2-10)，同样可得到前面给出的导波条件的一般形式

$$n_2 K_0 < \beta < n_1 K_0$$

(4) 光线的空间周期

光线空间周期 Λ 是指正弦型光线在一个振荡周期内的传播距离。由式 (3.2-8) 容易得到

$$\begin{aligned} p\Lambda &= 2\pi \\ \Lambda &= \frac{2\pi a \cos \theta_0}{\sqrt{2\Delta}} \end{aligned} \quad (3.2-12)$$

波导结构确定以后， Λ 也与初始入射角 θ_0 有关， θ_0 越大， Λ 越小，如图 3.3 所示。

(5) 自聚焦现象

式 (3.2-12) 表明，折射率呈抛物型渐变的波导， Λ 与 θ_0 有关。尽管如此，当 Δ 很小时，如取 $\Delta = 0.01$ ，导波光线的 θ_0 则被限制在约 $0^\circ \sim 8^\circ$ 之间。这时，不同的 θ_0 引起的空间周期的偏离通常不超过 1%，多径光线空间周期近似相同，因此输入点的发散光线会在 $\Lambda/2$ 处重新汇聚，并在 $\Lambda/2$ 整数倍处逐次汇聚。另外，输入点出发的光线会在 $\Lambda/4$ 处形成平行光；如果入射的是平行光，也会在 $\Lambda/4$ 处聚焦。这些现象如同透镜效应，称为自聚焦现象，并且焦距 $f = \Lambda/4$ 。3.4 节要介绍的梯度光纤，纤芯折射率也是渐变的，其中光线同样有此现象，此时 a 相当于芯半径。所以可选择适当长度，使从光纤出来的光为平行光或会聚光。如果对波导或光纤的折射率分布进行特殊设计，则可以实现严格的自聚焦，如 3.5.2 节中折射率呈双曲正割函数分布的波导中的光线。

3.3 阶跃光纤中的光线

光纤实际上就是圆柱形状的介质波导，结构由纤芯和包层组成。光纤材料有石英的，多组

分玻璃的，也有塑料的。石英光纤的纤芯和包层材料都是石英玻璃，只是掺杂成分和浓度略有不同。光纤可分为多模光纤和单模光纤。目前石英光纤的技术指标已经标准化，如表 3.1 所示。阶跃光纤 (SIF: step index fiber) 芯层折射率 n_1 和包层折射率 n_2 都是均匀不变的，且 $n_1 > n_2$ 。

表 3.1 石英光纤结构参数

种 类	芯径 $2a$ /包层 $2b$ (μm)	相对折射率差 Δ
多模光纤	50/125	1%~2%
	62.5/125	
	100/140	
单模光纤	200/230	0.3%~1%
	4~10/125	

3.3.1 子午光线

由于阶跃光纤的纤芯折射率均匀，所以光线在纤芯内沿直线传播，经多次反射的纤芯光线形成折线路径。如果光线的某一折线段与光纤轴线相交，则该线段必在含轴线的的一个主截面内。由该线段在界面上的入射点引出的柱面半径即法线也必然在同一主截面内，因为反射定律要求入射线、法线、反射线共面，因而反射线必定在这一主截面内，进而逐次反射所形成的锯齿形光线也必将落在同一平面内，且各段均与轴线相交。这种与轴线相交的光线称为子午光线，图 3.4 示出了子午线的投影图。

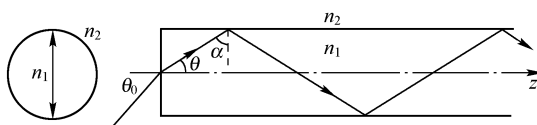


图 3.4 阶跃光纤子午线

(1) 导波条件

阶跃光纤子午线的导波条件由全反射条件决定，如图 3.4 所示，设 θ 为光线与 z 轴的夹角， α 为界面入射角，则 $\cos \theta = \sin \alpha > n_2 / n_1$ ， $n_1 \cos \theta > n_2$ ，因而导波条件仍然为

$$n_2 < \bar{\beta} < n_1 \quad (3.3-1)$$

(2) 数值孔径

假设光纤的端面有光线输入，端面入射角为 θ_0 ，则

$$n_0 \sin \theta_0 = n_1 \sin \theta \quad (\text{设 } n_0 = 1)$$

因导波条件 $\cos \theta > n_2 / n_1$ 或 $\sin \theta < \sqrt{1 - n_2^2 / n_1^2}$ ，得

$$\sin \theta_0 < \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \quad (3.3-2)$$

定义由导波条件限制的光线最大入射角的正弦 $\sin \theta_0$ 为光纤的数值孔径 (Numerical Aperture)，记为 NA

$$\text{NA} = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = n_1 \sqrt{2\Delta} \quad (3.3-3)$$

数值孔径是光纤的重要参数，NA 越大，光纤接收光的能力越强，纤芯对能量的束缚越强，光纤抗弯曲性能越好。从式 (3.3-3) 可见， Δ 越大，NA 越大。但后面会介绍， Δ 越大，模式色散会越严重，将影响信号的传输质量。实际的多模光纤的数值孔径约为 0.2，单模光纤的数值孔径约为 0.1。

如果是渐变折射率光纤，则数值孔径不是常数，与光线射入光纤的位置即径向距离 r_0 有关，称为本地数值孔径

$$\text{NA} = \sqrt{n^2(r_0) - n^2(a)}$$

$n(a)$ 为光纤芯部最低的折射率。

3.3.2 偏斜光线

纤芯内存在的另一类光线是不与轴相交的空间折线，称为偏斜光线。这种光线通过反射，在柱面内既旋转又前进，但始终与轴保持一定距离，因而可以设想偏斜光线在传播过程中总与一个虚拟的圆柱面相切，这个圆柱面称为偏斜光线的内焦散面，如图 3.5 所示。

偏斜光线的具体性质可归纳为它的一些几何参数的不变性，如图 3.6 所示，在光线传播过程中，保持恒定的参数包括：

- (1) 逐次反射的反射角 α ;
- (2) 光线的线段长度 L ;
- (3) 光线与轴线的夹角 θ ;
- (4) 光线的旋进距离 z ;
- (5) 光线的旋转角 φ ;
- (6) 光线与轴线的距离 l 。

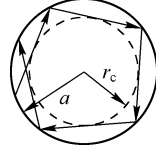


图 3.5 偏斜光线投影图

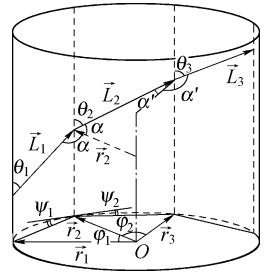


图 3.6 偏斜光线立体图

对上述结论的证明只需依据光的反射定律。相邻两段光线用 \vec{L}_1 和 \vec{L}_2 表示，它们的纵向分量分别为 \vec{Z}_1 和 \vec{Z}_2 ，横向投影的端点矢用 \vec{r}_1 、 \vec{r}_2 、 \vec{r}_3 表示，那么

$$\vec{L}_1 = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 + \vec{Z}_1 \quad (3.3-4)$$

$$\vec{L}_2 = \vec{r}_3 - \vec{r}_2 + \vec{Z}_2 \quad (3.3-5)$$

由于 \vec{L}_1 、 \vec{L}_2 、 \vec{r}_2 三线共面，且入射角等于反射角，以矢量形式表示为

$$\vec{r}_2 \cdot \vec{L}_1 / L_1 = -\vec{r}_2 \cdot \vec{L}_2 / L_2 \quad (3.3-6)$$

$$\vec{r}_2 \times \vec{L}_1 / L_1 = \vec{r}_2 \times \vec{L}_2 / L_2 \quad (3.3-7)$$

将式 (3.3-4) 和式 (3.3-5) 分别代入上面二式，得到

$$\frac{1 - \cos \varphi_1}{L_1} = \frac{1 - \cos \varphi_2}{L_2} \quad (3.3-8)$$

$$(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 + \vec{r}_2 \times \vec{Z}_1) / L_1 = (\vec{r}_2 \times \vec{r}_3 + \vec{r}_2 \times \vec{Z}_2) / L_2 \quad (3.3-9)$$

分离式 (3.3-9) 的纵向部分和横向部分，分别得到

$$\frac{\vec{r}_1 \times \vec{r}_2}{L_1} = \frac{\vec{r}_2 \times \vec{r}_3}{L_2}$$

即

$$\frac{\sin \varphi_1}{L_1} = \frac{\sin \varphi_2}{L_2} \quad (3.3-10)$$

及

$$\frac{\vec{r}_2 \times \vec{Z}_1}{L_1} = \frac{\vec{r}_2 \times \vec{Z}_2}{L_2}$$

即

$$\frac{Z_1}{L_1} = \frac{Z_2}{L_2} \quad (3.3-11)$$

综合式 (3.3-8) 和式 (3.3-10) 得到

$$\frac{1 - \cos \varphi_1}{\sin \varphi_1} = \frac{1 - \cos \varphi_2}{\sin \varphi_2}$$

即

$$\tan \frac{\varphi_1}{2} = \tan \frac{\varphi_2}{2} \quad (3.3-12)$$

至此已证明

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad L_1 = L_2, \quad Z_1 = Z_2, \quad \theta_1 = \theta_2, \quad \alpha_1 = \alpha_2, \quad l_1 = l_2 \quad (3.3-13)$$

子午光线的导波条件也适用于偏斜光线，现在证明对于偏斜光线， $\bar{\beta} > n_2$ 或 $\cos \theta > n_2/n_1$ 同样满足全反射条件。由图 3.6 的几何关系容易得到

$$\cos \alpha = \sin \theta \sin \frac{\varphi}{2} \quad (3.3-14)$$

即 $\cos \alpha \leq \sin \theta$ ，则

$$\sin \alpha \geq \cos \theta > n_2/n_1 \quad (3.3-15)$$

3.4 梯度光纤中的光线

梯度光纤 (GIF: graded index fiber)，也称渐变光纤，纤芯折射率 $n(\bar{r})$ 沿径向单调下降，并且是轴对称函数，设 $n(0) = n_1$ ， $n(a) = n_2$ ，包层折射率 n_2 均匀不变。

3.4.1 柱坐标的光线方程

建立以光纤轴为 z 轴的柱坐标系 (r, φ, z) ，如图 3.7 所示。光线的矢量微元为

$$d\bar{R} = \bar{r}_0 dr + \bar{\varphi}_0 r d\varphi + \bar{z}_0 dz \quad (3.4-1)$$

$$\frac{d\bar{R}}{dS} = \bar{r}_0 \frac{dr}{dS} + \bar{\varphi}_0 r \frac{d\varphi}{dS} + \bar{z}_0 \frac{dz}{dS} \quad (3.4-2)$$

式中， \bar{r}_0 、 $\bar{\varphi}_0$ 、 \bar{z}_0 为单位矢量。

在柱坐标下，光线方程 $\frac{d}{dS} \left(n \frac{d\bar{R}}{dS} \right) = \nabla n$ 等号左、右两端表示

形式分别为

$$\frac{d}{dS} \left(n \frac{d\bar{R}}{dS} \right) = \bar{r}_0 \frac{d}{dS} \left(n \frac{dr}{dS} \right) + \bar{\varphi}_0 \frac{d}{dS} \left(nr \frac{d\varphi}{dS} \right) + \bar{z}_0 \frac{d}{dS} \left(n \frac{dz}{dS} \right) + n \frac{dr}{dS} \frac{d\bar{r}_0}{dS} + nr \frac{d\varphi}{dS} \frac{d\bar{\varphi}_0}{dS} \quad (3.4-3)$$

$$\nabla n = \bar{r}_0 \frac{\partial n}{\partial r} + \bar{\varphi}_0 \frac{1}{r} \frac{\partial n}{\partial \varphi} + \bar{z}_0 \frac{\partial n}{\partial z} = \bar{r}_0 \frac{\partial n}{\partial r} \quad (3.4-4)$$

利用如下的微分关系式

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{r}_0}{dS} &= \frac{d\varphi}{dS} \frac{d\bar{r}_0}{d\varphi} = \bar{\varphi}_0 \frac{d\varphi}{dS} \\ \frac{d\bar{\varphi}_0}{dS} &= \frac{d\varphi}{dS} \frac{\partial \bar{\varphi}_0}{\partial \varphi} = -\bar{r}_0 \frac{d\varphi}{dS} \end{aligned}$$

经整理得到柱坐标下光线方程的分量形式

$$\frac{d}{dS} \left(n \frac{dr}{dS} \right) - nr \left(\frac{d\varphi}{dS} \right)^2 = \frac{dn}{dr} \quad (3.4-5)$$

$$\frac{d}{dS} \left(nr \frac{d\varphi}{dS} \right) + n \frac{dr}{dS} \frac{d\varphi}{dS} = 0 \quad (3.4-6)$$

$$\frac{d}{dS} \left(n \frac{dz}{dS} \right) = 0 \quad (3.4-7)$$

上述方程中出现的坐标变量的导数，可用几何参数表示，以便于直观理解。如图 3.7 所示， θ 表示 $d\bar{R}$ 与 z 轴的夹角， ψ 表示 $d\bar{R}$ 在横截面内的投影与切线方向的夹角。由此，矢量微元 $d\bar{R}$ 及其分量的几何关系表示如下：

$$\text{径向分量: } dr = dS \sin \theta \sin \psi \text{ 或 } \frac{dr}{dS} = \sin \theta \sin \psi \quad (3.4-8)$$

$$\text{切向分量: } r d\varphi = dS \sin \theta \cos \psi \text{ 或 } \frac{d\varphi}{dS} = \frac{1}{r} \sin \theta \cos \psi \quad (3.4-9)$$

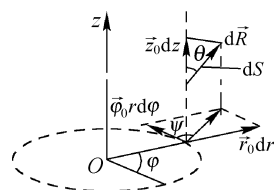


图 3.7 柱坐标下微元
矢量分解图

$$\text{纵向分量: } dz = dS \cos \theta \text{ 或 } \frac{dz}{dS} = \cos \theta \quad (3.4-10)$$

3.4.2 光线不变量

方程式(3.4-7)是全微分形式, 由此可以确定光线的第一个不变量

$$n(r) \frac{dz}{dS} = n(r) \cos \theta = \bar{\beta} \quad (3.4-11)$$

$\bar{\beta}$ 是各种波导共有的传播常数(这里用有效折射率表示), 它的不变性等价于波矢 \vec{K} 的传播分量 $K_z = K_0 \bar{\beta}$ 的不变性, 这是由光纤介质在 z 方向的均匀性所决定的, 因为 $n(r)$ 仅是 r 的函数, 说明光线沿 z 轴传播的速度恒定不变, 与光线的轴向夹角 θ 无关, 也意味着光子动量($\hbar \vec{K}$)的 z 分量守恒。

用 r 乘以方程式(3.4-6)的各项, 可使该方程演变为全微分形式

$$\frac{d}{dS} \left(nr^2 \frac{d\varphi}{dS} \right) = 0 \quad (3.4-12)$$

由此得到第二个光线不变量

$$nr^2 \frac{d\varphi}{dS} = nr \sin \theta \cos \psi = av \quad (3.4-13)$$

其中 a 为光纤半径, v 称为光线旋转常数, 是描述光线旋转程度的无量纲参数。例如对于子午线, $\psi = \pi/2$, $v=0$, 表明子午线是无旋转的光线; 而对于偏斜光线, v 一定是非零的。

一个代表光线旋转性的不变量的存在, 本质上是由光纤介质分布的轴对称性决定的, 它意味着光子角动量($\vec{r} \times \hbar \vec{K}$)的 z 分量守恒。也说明光线角向转动速度取决于光线轨迹到纤轴的距离 r , 最大的 r 处光线转动最慢, 最小的 r 处光线转动最快。

3.4.3 光线判据函数

梯度光纤中的光线受到两个不变量的控制, 同时又受到径向折射率梯度的拉动作用, 因而这些光线必定是空间曲线。如果 $v=0$, $d\varphi/dS=0$, 则光线必然是主截面内的平面曲线; 如果 $v \neq 0$, 则光线会同时转动和进动而形成螺旋状的空间曲线。无论是子午线还是偏斜光线, 它们都可能是束缚光线或者折射光线, 如何通过参数的鉴别, 区分不同性质的光线是一个基本问题。

梯度光纤中束缚光线不是通过全反射转向的, 而是在折射率梯度作用下渐变转向的, 并且在到达包层界面之前实现折返, 折返点的存在是束缚光线区别于折射光线的特点。

折返点显然是 r 的极值点, 因而应有

$$dr/dS = 0 \quad (3.4-14)$$

由式(3.4-8)和式(3.4-13), 可以得到 dr/dS 与常数 $\bar{\beta}$ 和 v 的关系式

$$\left(\frac{dr}{dS} \right)^2 = \sin^2 \theta \sin^2 \psi = \sin^2 \theta (1 - \cos^2 \psi) = \sin^2 \theta - \frac{a^2 v^2}{n^2 r^2}$$

$$n^2 \left(\frac{dr}{dS} \right)^2 = n^2(r) - \bar{\beta}^2 - a^2 v^2 / r^2 \quad (3.4-15)$$

定义光线判据函数

$$g(r) = n^2(r) - \bar{\beta}^2 - a^2 v^2 / r^2 \quad (3.4-16)$$

$g(r)$ 是柱坐标 r 的函数, 对光线分析有实际意义。 $g(r)$ 函数的零点对应光线的折返点, 因而可以方便地求解折返点的位置。另一方面对于光线的其他部分, 必有 $g(r) > 0$, 但是某些参数也可以使 $g(r) < 0$, 这显然与式(3.4-15)、式(3.4-16)不相容, 唯一的解释是, $g(r)$ 的负值区不存在光

线。所以, $g(r) \geq 0$ 是光线存在的必要条件。

3.4.4 光线分析

1. 阶跃光纤的子午光线

这里再利用光线判据函数来分析一下阶跃光纤中的子午线。光线在一个平面内传输, 无转动, $\nu=0$, 相应 $d\varphi/dS=0$, 即 $\psi=\pi/2$ 。判据函数为 $g(r)=n^2-\bar{\beta}^2$, 当 $n_2 < \bar{\beta} < n_1$ 时, 芯区 $g>0$, 包层 $g<0$, 如图 3.8(a) 所示。此时芯区有光线, 包层无光线, 光线被束缚在芯区, 为导波光线。当 $\bar{\beta} < n_2$ 时, 芯区和包层的判据函数均为 $g>0$, 如图 3.8(b) 所示。此时光线不但在芯区内传输, 同时进入包层传输, 不被束缚, 属于辐射光线, 也即折射光线。

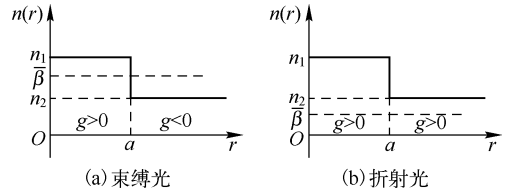


图 3.8 阶跃光纤子午光线的判断

2. 阶跃光纤的偏斜光线

偏斜光线的特点是旋转常数 $\nu \neq 0$, 光线具有旋转性, 并且不经过轴线。光线判据函数为

$$g(r) = n^2 - \bar{\beta}^2 - a^2 \nu^2 / r^2 \quad (3.4-17)$$

将 $g(r)$ 关键点取值列入表 3.2 中。可见在 $r=0$ 处永远无光线, 光线不可能与轴相交。如图 3.5 和图 3.9 所示, 这里分三种情况对光线进行分析。

表 3.2 $g(r)$ 关键点取值

r	0	$(0 \rightarrow) a$	$a (\leftarrow \infty)$	∞
$g(r)$	$-\infty$	$n_1^2 - \bar{\beta}^2 - \nu^2$	$n_2^2 - \bar{\beta}^2 - \nu^2$	$n_2^2 - \bar{\beta}^2$

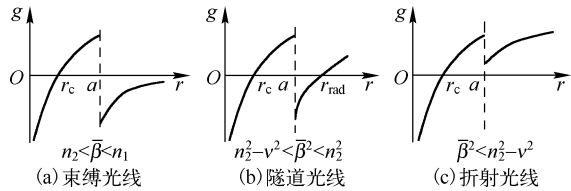


图 3.9 阶跃光纤偏斜光线的三种可能情况

(1) 束缚光线 $n_2 < \bar{\beta} < n_1$

包层中光线判据函数始终小于零, 不存在光线。在芯区, 只在 (r_c, a) 区域存在光线, $r=r_c$ 的圆柱面为内焦散圆柱面, 该面上的 $g=0$ 。

(2) 隧道光线 $n_2^2 - \nu^2 < \bar{\beta}^2 < n_2^2$

包层中, $g(a) = n_2^2 - \bar{\beta}^2 - \nu^2 < 0$ 及 $g(\infty) = n_2^2 - \bar{\beta}^2 > 0$, 包层 $g(r)$ 由负转正, 存在一个零点, 设零点位置为 r_{rad} , 如图 3.9(b) 所示, 于是

$$r_{\text{rad}} = a\nu / \sqrt{n_2^2 - \bar{\beta}^2} \quad (3.4-18)$$

上式定义了辐射焦散面, 并且 $r_{\text{rad}} > a$ 。

这种情况下, 包层被分割为无光线的暗区 (a, r_{rad}) 和光线传播区 (r_{rad}, ∞) , 芯区内的光线分布与 (1) 基本相同, 这类光线称作隧道光线。隧道名称的由来是基于这些光线仿佛是穿过一段有限长的隧道而到达包层的这一事实。包层光线的来源一般解释为, 芯区光线借助于隧道“暗区”存在的“倏逝波”的耦合作用, 泄漏到包层中。辐射引起功率损耗, 因而这种光线属于泄漏光线。泄漏造成芯区光线的能量损耗, 因而隧道光线在传播过程中会很快被淘汰, 不能成为导波光线。

(3) 折射光线 $\bar{\beta}^2 < n_2^2 - \nu^2$

包层中, $g(a) = n_2^2 - \bar{\beta}^2 - \nu^2 > 0$, $g(r)$ 函数单调递增, 所以在包层中始终存在 $g(r) > 0$, 包

层变为光线传播区，为折射光线，自然也属于泄漏光线，如图 3.9(c) 所示。

3. 梯度光纤的子午光线

同样，子午光线的特点是 $\nu = 0$ ，或者 $d\varphi/dS = 0$ ，所以 φ 为定值，光线是主截面内的平面光线。光线判据函数为

$$g(r) = n^2(r) - \bar{\beta}^2 \quad (3.4-19)$$

(1) 束缚光线 $n_2 < \bar{\beta} < n_1$

包层中 $g(r) = n_2^2 - \bar{\beta}^2 < 0$ ，包层不存在光线，证明光线全部被约束在芯区内，因而光线性质是束缚光线。

芯区内，因折射率 $n(r)$ 是单调递减函数（见图 3.10）， $g(0) = n_1^2 - \bar{\beta}^2 > 0$ ，而 $g(a) = n_2^2 - \bar{\beta}^2 < 0$ ，因而在 $(0, a)$ 区间 $g(r)$ 必有一个零点 r_p ($r_p \leq a$)，光线有折返点，光线被限制在以 r_p 为半径的圆柱形焦散面内，形成类似正弦型的光线路径，如图 3.11 所示。

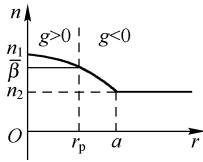


图 3.10 子午光线判据图

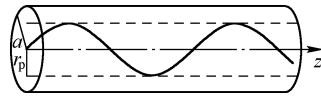


图 3.11 梯度光纤子午线侧视图

(2) 折射光线 $\bar{\beta} < n_2$

包层中 $g(r) = n_2^2 - \bar{\beta}^2 > 0$ ，包层存在光线，说明芯区光线可以进入包层，因而光线性质是折射光线。

4. 梯度光纤的偏斜光线

梯度光纤中的偏斜光线，同样旋转常数 $\nu \neq 0$ ，并且光线不经过轴线。光线判据函数为

$$g(r) = n^2(r) - \bar{\beta}^2 - a^2 \nu^2 / r^2 \quad (3.4-20)$$

根据表 3.2 所列关键点的 $g(r)$ 值，下面继续分三种情况讨论。

(1) 束缚光线 $n_2 < \bar{\beta} < n_1$

包层中 $g(r) = n_2^2 - \bar{\beta}^2 - a^2 \nu^2 / r^2 < 0$ ，包层不存在光线，光线被束缚在芯区，因而光线性质是束缚光线。

芯区内，芯区光线不能占有全部 $(0, a)$ 区间，因为 $g(0) = -\infty$ ， $g(a) = n_2^2 - \bar{\beta}^2 - \nu^2 < 0$ ，即轴线邻域和界面附近都是非光线区，因而光线只能在内切焦散面和外切焦散面之间的区域内往返绕行。内切和外切焦散面半径 r_c 和 r_p 必是 $g(r)$ 的两个零点（见图 3.13(a)）。光线交替与两交散面相切，形成螺旋形空间曲线，如图 3.12 所示。

(2) 隧道光线 $n_2^2 - \nu^2 < \bar{\beta}^2 < n_2^2$

包层中 $g(a) = n_2^2 - \bar{\beta}^2 - \nu^2 < 0$ 及 $g(\infty) = n_2^2 - \bar{\beta}^2 > 0$ ，包层 $g(r)$ 由负转正，必有零点存在。与阶跃光纤的隧道光线情况相同，由式 (3.4-18) 定义的辐射焦散面 r_{rad} 将包层分割为暗区 (a, r_{rad}) 和光线传播区 (r_{rad}, ∞) 。纤芯和包层路径被 $r_p < r < r_{rad}$ 区域分隔开，在此区域内光波传输不能发生。但隧道光线每次到达外焦散面时都要损失功率，损失的功率在辐射焦散面处重新出现，并沿着包层中的路径辐射掉，如图 3.13(b) 所示。

此时芯区内的光线分布情况与 (1) 基本相同，只是因为 $\bar{\beta}$ 变小， r_p 零点右移，光区扩大及接近界面，束缚光线变成隧道光线。泄漏造成芯区光线的损耗，因而隧道光线在传播过程中

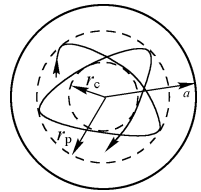


图 3.12 梯度光纤偏斜光线投影图

会很快被淘汰, 不能成为导波光线。

(3) 折射光线 $\bar{\beta}^2 < n_2^2 - v^2$

包层中 $g(a) = n_2^2 - \bar{\beta}^2 - v^2 > 0$, 相对于情况 (2), $\bar{\beta}$ 进一步下降, 因而包层和芯区的 $g(r)$ 函数曲线全部升高, 在包层 $g(r) \geq g(a) > 0$, 包层变为光线传播区, 如图 3.13(c) 所示。

芯区内, 由于 $g(r)$ 函数曲线整体上移, 邻近界面的暗区消失, 芯区的光区与包层连通, 光线自由进入包层, 形成折射光线。

总之, 不论是阶跃光纤还是梯度光纤, 子午光线和偏斜光线的各种情况中, 只有束缚光线才能长距离传输, 并且必要的导波条件是 $n_2 < \bar{\beta} < n_1$ 。

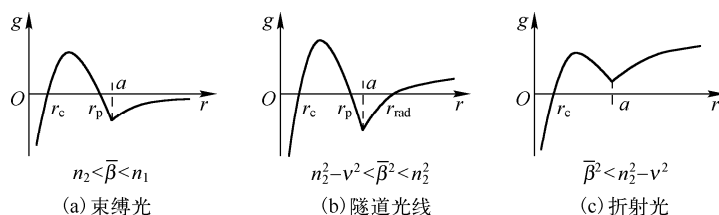


图 3.13 偏斜光线的三种可能情况

3.5 传播时延与色散特性

光在波导中传输单位距离所用的时间称作传播时延。光通信中要求同时输入的光信号尽可能地同时到达终端, 否则将引起信号失真、畸变。然而, 由于不同波长的光波将以不同的速度传播, 所以其时延不同, 会产生时延差; 即使同一波长的光, 当沿不同路径传播时, 时延也不相同, 这些都是色散现象。色散使输入的光脉冲在传播过程中进行展宽, 传输距离越远, 时间差越大, 展宽越严重, 致使前后脉冲相互重叠, 引起数字信号的码间串扰, 降低了输出端的分辨能力。在大容量和长距离的光纤通信中, 色散的影响显得更为突出。

色散可归结为下列几类:

(1) 材料色散。材料的折射率是波长的非线性函数, 从而使光的传播速度随波长而变, 由此引起的色散, 叫材料色散。

(2) 波导色散。同一模式的相位传播常数随波长而变, 从而引起的色散, 叫波导色散。

(3) 模式色散。多模光纤中, 即使在同一波长下, 不同模式或沿不同路径的光线的传播速度也不同, 它所引起的色散, 叫模式色散(也称多径色散、多模色散)。

(4) 偏振色散。单模光纤中实际存在偏振方向相互正交的两个基模。当光纤存在双折射时, 这两个模式的传输速度不同, 由此引起的色散, 叫偏振色散, 它属于模式色散的范畴, 是单模光纤所特有的。

在多模光纤中, 有模式色散、波导色散和材料色散, 而以模式色散为主。单模光纤中有材料色散、波导色散和偏振色散, 以材料色散为主。

由各种因素引起的时延差越大, 色散越严重。常用最大时延差, 即光纤或波导中速度最快和最慢的光波成分的时延差, 来表示色散程度, 简称时延差。通常更精确地描述色散对传输信号的影响是用脉冲展宽和光纤 3dB 带宽来表示的。

3.5.1 均匀介质波导的时延差

对阶跃光纤或均匀介质波导, 设芯区折射率为 n_1 , 光传播速度为 $v = c/n_1$, c 是真空中光

速。设光线与 z 轴的夹角为 θ ，则光波沿 z 轴方向的传播速度为 $v_z = c \cdot \cos \theta / n_1$ ，因此传播时延为

$$\tau = \frac{n_1}{c \cdot \cos \theta} \quad (3.5-1)$$

该式对均匀介质波导中的光线以及阶跃光纤中的子午线和偏斜光线都是成立的，可以看出，传播时延与 θ 有关，倾角不同的任意两条导波光线存在时延差。由于受到全反射条件 $n_2 / n_1 < \cos \theta < 1$ 的限制，显然，导波光线之间的最大时延差可表示为

$$\Delta \tau_{\max} = \frac{n_1}{c} \left(\frac{n_1}{n_2} - 1 \right) = \frac{n_1}{c} \Delta \quad (3.5-2)$$

从上式可见，最大时延差与相对折射率差成正比。为减小多径色散，实际光通信光纤的 Δ 不宜过大，通常需满足 $\Delta \ll 1$ 。

3.5.2 折射率渐变介质波导的时延差

假设色散以模式色散为主。为了克服这种多模(多径)色散问题，可以对波导进行设计实现单模传输，或者采用经特殊设计的非均匀介质波导，减小甚至消除时延差。这一问题对于渐变波导将比均匀波导有重大改善，因为在折射率渐变的光纤或波导中，光线路径为曲线，大振幅的光线路径长而大部分经过低折射率区，小振幅的光线路径短但只能经过高折射率区，因而它们的传播时间会趋近。

光在波导中传播时，有 $dz = ds \cdot \cos \theta$ ($dx = ds \cdot \sin \theta$)，并且 $\bar{\beta} = n \cos \theta$ 是一个不变量，通过计算一段路径 $P \rightarrow Q$ 的光程，传播时延可表示为

$$\tau = \frac{1}{c(z_Q - z_P)} \int_P^Q n(x) ds = \frac{1}{c(z_Q - z_P) \bar{\beta}} \int_P^Q n^2(x) dz \quad (3.5-3a)$$

$$\text{也可以用下式计算} \quad \tau = \frac{1}{c(z_Q - z_P)} \int_P^Q \frac{n^2(x)}{\sqrt{n^2(x) - \bar{\beta}^2}} dx \quad (3.5-3b)$$

这里讨论两种折射率渐变的波导中光线的传播时延。

首先，以 3.2 节中折射率按抛物型函数渐变的薄膜波导光线为例。由上式，最大振幅 ($x_m = a$, $\cos \theta_0 = 1 - \Delta$) 的光线的传播时延为

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{1}{c \Delta / 4 \bar{\beta}} \int_0^{A/4} n^2 dz = \frac{n_1}{c \Delta / 4 \cos \theta_0} \int_0^{A/4} \left(1 - \Delta \frac{x^2}{a^2} \right)^2 dz \\ &= \frac{n_1}{c \Delta / 4 \cos \theta_0} \int_0^{A/4} (1 - \Delta \sin^2 pz)^2 dz \end{aligned}$$

$$\text{积分得} \quad \tau = \frac{n_1}{c} \frac{1}{1 - \Delta} \left(1 - \Delta + \frac{3}{8} \Delta^2 \right) = \frac{n_1}{c} \left(1 + \frac{3}{8} \Delta^2 \right) \quad (3.5-4)$$

最小振幅的光线是 $x_m = 0$ 的直线，其时延为

$$\tau_0 = n_1 / c \quad (3.5-5)$$

所以最大时延差为

$$\Delta \tau_{\max} = \frac{3}{8} \frac{n_1}{c} \Delta^2 \quad (3.5-6)$$

由于 $\Delta \ll 1$ ，这一结果与式 (3.5-2) 给出的均匀介质波导的时延差 $\frac{n_1}{c} \Delta$ 相比，明显减小，降低了两个数量级。

下面再分析一下折射率呈双曲正割函数分布的波导中的光线和传播时延问题。

设波导折射率分布为

$$n(x) = n_1 \operatorname{sech}\left(\sqrt{2\Delta} \frac{x}{a}\right) \quad (3.5-7)$$

$n(0) = n_1$ 是波导中心的折射率。设初始光线从中心射入，与 z 轴夹角为 θ_0 ，并令 $\sqrt{2\Delta}/a = q$ ，利用光线方程式 (2.2-8)，得

$$n \frac{dz}{dS} = \text{常数} = n_1 \cos \theta_0 \quad (3.5-8)$$

$$\frac{d}{dS} \left(n \frac{dx}{dS} \right) = n_1 q \frac{\operatorname{sh}(qx)}{\operatorname{ch}^2(qx)} \quad (3.5-9)$$

利用式 (3.5-7) 和式 (3.5-8)，式 (3.5-9) 变换为

$$\cos^2 \theta_0 \frac{d^2 x}{dz^2} = q \frac{\operatorname{sh}(qx)}{\operatorname{ch}^3(qx)} \quad (3.5-10)$$

做变量代换，令 $u = \frac{dx}{dz}$ ，则 $\frac{d^2 x}{dz^2} = u \frac{du}{dx}$ ，上式变为

$$\cos^2 \theta_0 u du = q \frac{\operatorname{sh}(qx)}{\operatorname{ch}^3(qx)} dx \quad (3.5-11)$$

方程的解为

$$\cos \theta_0 u = \left[\frac{1}{\operatorname{ch}^2(qx)} + C \right]^{1/2} \quad (3.5-12)$$

由初始条件， $x=0$ 时， $u = dx/dz = \tan \theta_0$ ， $\operatorname{ch}(0) = 1$ ，确定 $C = -\cos^2 \theta_0$ 。上式进一步积分，得

$$z = \cos \theta_0 \int_0^x \frac{dx}{[\operatorname{sech}^2(qx) - \cos^2 \theta_0]^{1/2}} = \frac{1}{q} \int_0^x \frac{d[\operatorname{sh}(qx)]}{[1/\cos^2 \theta_0 - 1 - \operatorname{sh}^2(qx)]^{1/2}}$$

最终解为

$$z = \frac{1}{q} \arcsin \frac{\operatorname{sh}(qx)}{\tan \theta_0} \quad (3.5-13)$$

或者

$$x = \frac{a}{\sqrt{2\Delta}} \operatorname{arsh} \left[\tan \theta_0 \sin \left(\frac{\sqrt{2\Delta}}{a} z \right) \right] \quad (3.5-14)$$

可见，折射率按双曲正割函数分布的波导中的光线也是周期性曲线，且空间周期为

$$\Lambda = 2\pi a / \sqrt{2\Delta} \quad (3.5-15)$$

特别地，该周期与光线初始倾角 θ_0 无关，由波导参数 a 、 Δ 决定，表明从波导轴上同一点发出的 θ_0 不同的光线，经半个周期后又会在同一点会聚，这种自聚焦是严格的，见图 3.14。利用式 (3.5-3b) 进行积分，可得传播时延为

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{4}{c\Lambda} \int_0^{x_m} \frac{n_1 \operatorname{sech}^2(qx)}{\sqrt{\operatorname{sech}^2(qx) - \cos^2 \theta_0}} dx \\ &= \frac{4n_1}{c\Lambda} \int_0^{x_m} \frac{d[\operatorname{th}(qx)]}{q\sqrt{\sin^2 \theta_0 - \operatorname{th}^2(qx)}} \\ &= \frac{4n_1}{c\Lambda} \frac{1}{q} \arcsin \frac{\operatorname{th}(qx)}{\sin \theta_0} \Big|_0^{x_m} = \frac{n_1}{c} \end{aligned} \quad (3.5-16)$$

其中

$$x_m = \frac{a}{\sqrt{2\Delta}} \operatorname{arch} \frac{1}{\cos \theta_0} \quad (3.5-17)$$

注意： x_m 由在折返点满足 $n(x_m) = n_1 \cos \theta_0$ 的关系式得到。注意，上述推导中要用到一些复

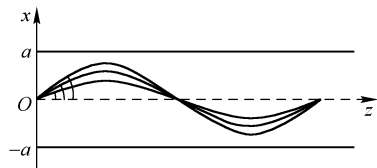


图 3.14 双曲正割型折射率分布波导中的多径光线

① $\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ ， $\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ， $\frac{d}{dx} \operatorname{ch}(x) = \operatorname{sh}(x)$ ， $\frac{d}{dx} \operatorname{sh}(x) = \operatorname{ch}(x)$ ， $\operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}(x)}$ ， $\operatorname{csch}(x) = \frac{1}{\operatorname{sh}(x)}$ ， $\frac{d}{dx} \operatorname{sech}(x) = -\operatorname{th}(x) \cdot \operatorname{sech}(x)$

杂的双曲函数的变换公式和积分公式。

由式(3.5-16)可知, 对双曲正割型折射率分布的波导, 时延与 θ_0 无关, 时延差为零, 同一时刻从始端发出的所有沿不同路径传播的光线必将同时到达终端, 这种结构的波导具有良好的自聚焦性, 不存在多模色散问题。

由 3.2 节及以上推导可知, 抛物型折射率分布波导在弱波导近似条件下, 可以使光线具有近似相同的空间周期, 尽量减小模式色散, 但是各条光线的时延并不完全相等; 双曲正割型折射率分布波导可以使不同入射条件下的光线具有相同的空间周期和轴向传播速度, 从而使它们的时延完全相同, 因此具有良好的自聚焦性, 可以最大限度地消除模式色散。这一特性对于呈双曲正割折射率分布的光纤中的子午线同样适用。

3.5.3 光纤的色散

假设有一频率为 f 的已调制载波在光纤中传输, 光信号在光纤中传输的群速度 V_g 的定义为

$$V_g = \frac{d\omega}{d\beta} \quad (3.5-18)$$

其中 ω 为角频率, β 为光传播常数。则传播时延为

$$\tau_0 = \frac{d\beta}{d\omega} \quad (3.5-19)$$

β 和 τ_0 都是波长或频率的函数。 τ_0 也常写成

$$\tau_0 = \frac{d\beta}{cdK_0} = -\frac{\lambda^2}{2\pi c} \frac{d\beta}{d\lambda} \quad (3.5-20)$$

其中 K_0 为自由空间波数, λ 为光波波长。各信号成分的时延不同, 存在着时延差。因此时延差可由信号各频率成分传输速度不同引起, 也可由不同模式的不同传输速度引起。上面两节分析的即是波导本身的色散特性, 即光沿不同路径(对应不同的模式)引起的时延差。在光纤通信系统中, 必须有光源, 而光源不是单色光, 都具有一定的谱宽, 谱宽是引起材料色散和波导色散的原因。

设光谱谱宽为 Δf , 中心频率为 f_0 , 当 Δf 不是很大时, 由频率变化所引起的时延差近似为

$$\Delta\tau_0 = \Delta\omega \frac{d\tau_0}{d\omega} \quad (3.5-21)$$

将式(3.5-19)或式(3.5-20)代入上式, 则可以用多种形式表示 $\Delta\tau_0$:

$$\Delta\tau_0 = \Delta\omega \frac{d^2\beta}{d\omega^2} \quad (3.5-22)$$

$$\Delta\tau_0 = \frac{K_0}{c} \frac{\Delta f}{f_0} \frac{d^2\beta}{dK_0^2} \quad (3.5-23)$$

$$\Delta\tau_0 = -\frac{\Delta\lambda}{2\pi c} \left(2\lambda \frac{d\beta}{d\lambda} + \lambda^2 \frac{d^2\beta}{d\lambda^2} \right) \quad (3.5-24)$$

时延差与光源的相对带宽成正比, 因而用窄线宽的半导体激光器做光源较发光二极管有利于减小色散的影响。也常用色散系数 D 来表示光源的色散, 其定义为光源单位线宽在光纤上引起的时延差, 即

$$D = \frac{d\tau_0}{d\lambda} \quad (3.5-25)$$

时延差的单位是 ps/km, 色散系数的单位是 ps/(km·nm)。

在无界材料中, 光传播常数 $\beta = n \cdot 2\pi/\lambda$, 考虑到材料色散, 折射率 n 是波长 λ 的函数, 根据式(3.5-20), 有

$$\tau_0 = \frac{1}{c} \left(n - \lambda \frac{dn}{d\lambda} \right) = \frac{n_g}{c} \quad (3.5-26)$$

n_g 称作群折射率, 因此群速度可表示为 $V_g = c/n_g$ 。一个带宽为 $\Delta\lambda$ 的窄脉冲光波进入光纤, 则材料色散引起的时延差为

$$\Delta\tau_0 = \frac{d\tau_0}{d\lambda} \Delta\lambda = -\frac{\lambda}{c} \frac{d^2n}{d\lambda^2} \Delta\lambda = D_m \Delta\lambda \quad (3.5-27)$$

其中 $D_m = -\frac{\lambda}{c} \frac{d^2n}{d\lambda^2}$ 为材料色散系数。 $D_m = 0$ 点的波长叫做材料的零色散波长。

光纤中通常几种色散因素共存, 材料色散、波导色散、模式色散等交织在一起, 根据是单模光纤还是多模光纤, 主要色散因素也不同。为了适应长距离、大容量光纤通信的需要, 须使光纤的色散降低, 频带展宽。为此可采用特种光纤设计, 例如用三角形折射率分布光纤可以将光纤的零色散点移至光通信波长处, 既保证了低损耗, 又实现了低色散, 这种光纤叫零色散频移光纤; 而用 W 形折射率分布光纤(双包层光纤), 可以改变波导色散的变化规律, 在两个波长上各有一个零色散点, 两点之间色散特性平坦, 具有较小的色散系数, 这种光纤叫宽带低色散光纤。

习题

3-1 基本概念: 传播常数, 有效折射率, 相对折射率差, 导波光线, 导波条件, 阶跃光纤, 梯度光纤, 子午光线, 偏斜光线, 数值孔径, 光线判据函数, 束缚光线, 隧道光线, 波导的自聚焦现象, 传播时延与时延差, 材料色散, 模式色散, 波导色散, 偏振色散。

3-2 一个平板波导, $n_1=2.0$, $n_2=1.6$, $n_3=1.0$, 导波光线的最大倾角是多少?

3-3 已知平板介质波导, $n_1=1.563$, $n_2=n_3=1.550$, 工作波长 $\lambda_0=1.30\mu\text{m}$, 试求波导最大有效折射率 n_{eff} 和最小传播常数 β_{min} 。

3-4 平面薄膜波导厚度为 $2a$, $n(x) = n_1 \left(1 - \Delta \frac{x^2}{a^2} \right)$, Δ 为相对折射率差。光线初始距 z 轴为 b , 且与 z 轴夹角为 θ_0 , 求:

(1) 光线方程 $x=x(z)$;

(2) 空间周期;

(3) 若确保该光线以导波形式传输, 入射倾角 θ_0 的最大值是多少?

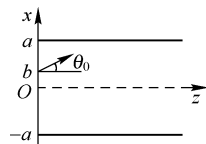


图 3.15 习题 3-4 的图

3-5 从光线方程分别定性说明光线在阶跃光纤和梯度光纤中的轨迹曲线。

3-6 利用光线判据函数 $g(r)$ 说明阶跃光纤的束缚光线满足 $n_2 < \bar{\beta} < n_1$ 。

3-7 利用光线判据函数, 分别分析阶跃光纤和梯度光纤中子午线的传播特点。

3-8 分别说明束缚光线、隧道光线和折射光线的特点。

3-9 抛物型折射率分布的梯度光纤, 其折射率为

$$n^2(r) = \begin{cases} n_1^2 [1 - 2\Delta(r/a)^2], & r \leq a \\ n_2^2, & r > a \end{cases}$$

(1) 利用光线判据函数 $g(r)$ 说明偏斜光线为导波光线的必要条件是 $g(r)=0$ 在芯区内有且只有两个实根 r_c 和 r_p ;

(2) 对子午光线, 导出束缚光线的有效折射率满足 $n_2 < \bar{\beta} < n_1$ 。

3-10 光纤芯和包层折射率分别为 1.51 和 1.50, 一束光通过 1km 长的这种光纤产生的时延差是多少?

3-11 如果光纤的折射率随波长而变, 是否一定会产生材料色散, 为什么?

3-12 已知某玻璃材料光纤的折射率 n 与波长 λ 的关系为 $n(\lambda) = A + B/\lambda^2$, 其中常数 $A = 1.53974$, $B = 4.5628 \times 10^3 \text{ nm}^2$ 。计算该光纤在 $\lambda = 1550 \text{ nm}$ 时的材料色散系数, 如果光源带宽 $\Delta\lambda = 2 \text{ nm}$, 则光传输时由材料色散引起的时延差有多大?

第 4 章 薄膜波导模式理论

本章将介绍利用经典电磁理论分析薄膜波导的方法。与几何光学相比，电磁场理论不仅能够提供更加详尽的光波信息，而且还引入了传播模式概念。理论证明，并不是导波条件所限定的任何 β 值都可以成为实际的传播常数，只有那些由特征方程所决定的特定值 β 才能对应一定的光波传播方式，这种由特定参数所确定的特殊传播方式，称为光波导的传播模式 (guided mode)。

4.1 均匀薄膜波导特征方程

为了不使严谨的数学推导脱离直观的概念，本节首先采用熟知的射线光学和波动光学干涉方法建立薄膜波导的特征方程。

如图 4.1 所示，设薄膜波导的芯层、衬底和覆盖层折射率分别为 n_1 、 n_2 和 n_3 ，且 $n_1 > n_2 \geq n_3$ ，芯层厚度为 d 。根据第 1 章给出的波矢大小[式 (1.3-9)]和由边值关系得到的式 (1.6-3)，对三层介质，有

$$K_1 = n_1 K_0, \quad K_2 = n_2 K_0, \quad K_3 = n_3 K_0 \quad (4.1-1)$$

$$\text{传播常数为 } \beta = K_{1z} = K_{2z} = K_{3z} = n_1 K_0 \sin \alpha \quad (4.1-2)$$

以 κ 表示芯层波矢的 x 分量，那么

$$\kappa = |K_{1x}| = n_1 K_0 \cos \alpha \quad (4.1-3)$$

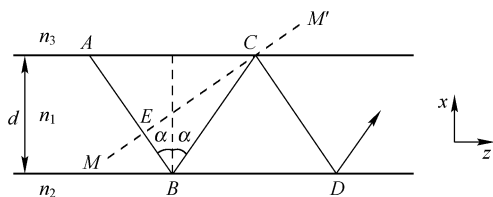


图 4.1 波导中的光线与波面

第 3 章已讨论的均匀介质波导的锯齿形光线，在波动光学看来只不过是大量的平面波的叠加。能够在薄膜波导中传输的光波，一定满足相干加强(谐振)条件，也就是说，这些平面波在它们共同的波面上，如 MM' 面，必须保持相位一致，或者只能有 2π 整数倍的相位差。现在考察图 4.1 中斜向下的相邻平行光线在波面上的光程差，显然 AB 、 CD 两条光线在它们共同波面 MM' 上的光程差为

$$\Delta = n_1(BC + BE) = n_1 d \frac{1}{\cos \alpha} (1 + \cos 2\alpha) = 2n_1 d \cos \alpha \quad (4.1-4)$$

因为这里的平面波表达式采取了 $\exp[i(\omega t - \vec{K} \cdot \vec{r})]$ 的形式，经过两次反射的光波在波面 MM' 上的相位要比其入射光波在 MM' 上的相位落后，因此由传播路程不同而引起的相位差可写为

$$\Phi_A = -K_0 \Delta = -2n_1 d K_0 \cos \alpha = -2\kappa d \quad (4.1-5)$$

此外，对两光波相位差的计算，还要考虑由于其中一条光线在芯层与衬底以及芯层与覆盖层两分界面上的全反射引起的相移 $2\Phi_{12}$ 和 $2\Phi_{13}$ ，所以，总相位差须满足如下的相干加强条件

$$-2\kappa d + 2\Phi_{12} + 2\Phi_{13} = -2m\pi \quad (4.1-6)$$

即

$$\kappa d = m\pi + \Phi_{12} + \Phi_{13} \quad (4.1-7)$$

其中将 m 称作模序数，取 $0, 1, 2, 3, \dots$ 一系列整数。方程式 (4.1-7) 为均匀薄膜波导的特征方程，或称色散方程，它是讨论波导特性的基础。方程的每一个满足导波条件的解，对应一种波导模式或电磁场模式，称作导模。利用 1.8 节的全反射相移公式，分别得到两种偏振态下的特征方程：

● TE 模:
$$\kappa d = m\pi + \arctan \frac{\sqrt{\sin^2 \alpha - n_2^2 / n_1^2}}{\cos \alpha} + \arctan \frac{\sqrt{\sin^2 \alpha - n_3^2 / n_1^2}}{\cos \alpha} \quad (4.1-8)$$

或者

$$\kappa d = m\pi + \arctan \frac{\sqrt{\beta^2 - n_2^2 K_0^2}}{\kappa} + \arctan \frac{\sqrt{\beta^2 - n_3^2 K_0^2}}{\kappa} \quad (4.1-9)$$

● TM 模:
$$\kappa d = m\pi + \arctan \frac{n_1^2}{n_2^2} \frac{\sqrt{\sin^2 \alpha - n_2^2 / n_1^2}}{\cos \alpha} + \arctan \frac{n_1^2}{n_3^2} \frac{\sqrt{\sin^2 \alpha - n_3^2 / n_1^2}}{\cos \alpha} \quad (4.1-10)$$

或者

$$\kappa d = m\pi + \arctan \frac{n_1^2}{n_2^2} \frac{\sqrt{\beta^2 - n_2^2 K_0^2}}{\kappa} + \arctan \frac{n_1^2}{n_3^2} \frac{\sqrt{\beta^2 - n_3^2 K_0^2}}{\kappa} \quad (4.1-11)$$

方程中 m 取非负的整数, 当波导的条件参数 d 、 n_1 、 n_2 、 n_3 及波长 λ 确定以后, 可以求解出对应一定 m 值的 β 和 κ , 这些模参数能够决定一个光波模式的全部特性。

需要强调的是, 由于 m 是非负整数, 是离散的, 因此在导波条件下, 即当 $n_2 K_0 < \beta < n_1 K_0$ 时, β 也是离散的, 是不连续的。所以导模是离散模, 具有离散谱。而当光线在芯层与衬底分界面上不能实现全反射或者在芯层与覆盖层分界面上也不能实现全反射时, 部分光将从芯层向衬底或者同时向衬底和覆盖层辐射出去, 这种光波模式称作辐射模。辐射模在芯层中不必满足谐振条件, 只要其传播常数 β 满足 $0 \leq \beta \leq n_2 K_0$, 就是辐射模, 所以辐射模的 β 在 $[0, n_2 K_0]$ 范围内可以连续取值, 辐射模谱为连续谱。

对某特定模式, 其 β 随工作波长 λ_0 (或角频率 ω 或波数 K_0) 而变化, 从而引起所谓的波导色散。即使同一波长, 波导模式不同, 传播常数也不同, 这会引起模式色散。图 4.2 是波导的 β - ω 曲线示意图, 可以分析波导的模式特性。图中, 三个离散模对应 $m=0,1,2$, $n_1 K_0$ 是最大可能的传播常数; $\beta > n_1 K_0$ 的区域为禁区, 代表不存在模式的区域; $\beta \leq n_2 K_0$ 的区域为连续的辐射模区域。

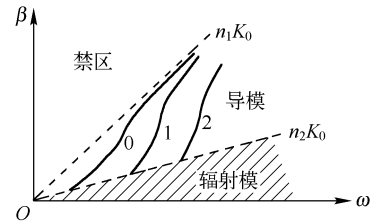


图 4.2 波导的 β - ω 曲线示意图

4.2 薄膜波导电磁场方程

由于几何光学理论的局限性, 当波导的横向尺度与光波长相当时, 利用几何光学理论得到的结果, 精度将极大降低甚至无法得到正确结果。光波导问题的严格分析应该是寻找满足光波导边界条件的电磁场方程的解, 确定各模式的电磁场的横向分布和纵向传输特性。无论对何种截面的波导, 如薄膜波导、光纤、条形波导等, 其中传输的任何导模、辐射模等都是满足 Maxwell 方程和边界条件的。所以首先从 Maxwell 方程出发, 利用单色电磁波的基本方程

$$\nabla \times \vec{E} = -i\omega\mu\vec{H} \quad (1.3-2a)$$

$$\nabla \times \vec{H} = -i\omega\varepsilon\vec{E} \quad (1.3-2b)$$

在直角坐标系下, 写出如下单色光波的分量形式

$$\frac{\partial}{\partial y} E_z - \frac{\partial}{\partial z} E_y = -i\omega\mu H_x \quad (4.2-1a)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} E_x - \frac{\partial}{\partial x} E_z = -i\omega\mu H_y \quad (4.2-1b)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} E_y - \frac{\partial}{\partial y} E_x = -i\omega\mu H_z \quad (4.2-1c)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} H_z - \frac{\partial}{\partial z} H_y = i\omega\varepsilon E_x \quad (4.2-2a)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} H_x - \frac{\partial}{\partial x} H_z = i\omega\varepsilon E_y \quad (4.2-2b)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} H_y - \frac{\partial}{\partial y} H_x = i\omega\varepsilon E_z \quad (4.2-2c)$$

薄膜波导如图 4.3 所示, 波导结构在 y 、 z 方向是无限的, 假设电磁波沿 z 方向传播, 因而波矢分量 $K_y=0$, $K_z=\beta$, 场量与 y 无关。由于受到上下界面的反射, 芯层内必然形成两种方向的平面波, 所以 K_x 有两种可能值, $K_x^+=\kappa$, $K_x^-=-\kappa$ 。为使方程简化, 以双平面波的叠加为依据, 构造一个形式解

$$\vec{E} = \vec{E}^+ e^{-i\vec{K}^+ \cdot \vec{r}} + \vec{E}^- e^{-i\vec{K}^- \cdot \vec{r}} = (\vec{E}^+ e^{-i\kappa x} + \vec{E}^- e^{i\kappa x}) e^{-i\beta z} \quad (4.2-3)$$

上式中, 括号内的表达式仅为 x 的函数, 这是一个变量分离的形式。同样的分析也适用于磁场强度 \vec{H} 矢量。由此, 得到如下形式解

$$\vec{E} = \vec{E}(x) e^{-i\beta z} \quad (4.2-4)$$

$$\vec{H} = \vec{H}(x) e^{-i\beta z} \quad (4.2-5)$$

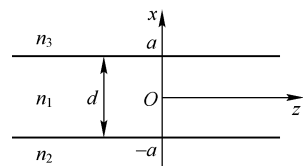


图 4.3 阶跃折射率薄膜波导

这种形式的函数, 自然满足 $\frac{\partial}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial}{\partial z} = -i\beta$ 。将上式代入方程式 (4.2-1) 和式 (4.2-2), 重新整理, 可得

$$\begin{cases} \beta E_y = -\omega\mu H_x \\ \frac{\partial}{\partial x} E_y = -i\omega\mu H_z \\ i\beta H_x + \frac{\partial}{\partial x} H_z = -i\omega\varepsilon E_y \end{cases} \quad (4.2-6)$$

$$\begin{cases} \beta H_y = \omega\varepsilon E_x \\ \frac{\partial}{\partial x} H_y = i\omega\varepsilon E_z \\ i\beta E_x + \frac{\partial}{\partial x} E_z = i\omega\mu H_y \end{cases} \quad (4.2-7)$$

可以看出, 式 (4.2-6) 和式 (4.2-7) 是各自独立互不关联的两个方程组。第一组方程只含 E_y 、 H_x 、 H_z 三个分量, 其中 E_y 是电场的唯一分量, 且垂直于传播方向, 因而电场是横场。该方程组所描述的传播模式称为横电模, 简称 TE 模。第二组方程含另外三个分量 H_y 、 E_x 、 E_z , 其中磁场 H_y 为横场分量, 所以由这些量所代表的电磁场模式称为横磁模, 简称 TM 模。

以上分析表明, 薄膜波导存在两种不同偏振状态的传播模式, 即 TE 模和 TM 模, 它们都是偏振模。对以上两个方程组分别进行变量代换可得到单变量微分方程

$$\frac{d^2}{dx^2} E_y + (n^2 K_0^2 - \beta^2) E_y = 0 \quad (4.2-8)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} H_y + (n^2 K_0^2 - \beta^2) H_y = 0 \quad (4.2-9)$$

● 对 TE 模, 只要求得 E_y , 则由式 (4.2-6) 可得其他两个分量

$$H_x = -\frac{\beta}{\omega\mu} E_y \quad (4.2-10)$$

$$H_z = \frac{i}{\omega\mu} \frac{\partial E_y}{\partial x} \quad (4.2-11)$$

● 对 TM 模，只要求得 H_y ，则由式 (4.2-7) 可得其他两个分量

$$E_x = \frac{\beta}{\omega \epsilon} H_y \quad (4.2-12)$$

$$E_z = -\frac{i}{\omega \epsilon_0} \frac{1}{n^2} \frac{\partial H_y}{\partial x} \quad (4.2-13)$$

两种偏振模式的相关场分量 (E_y 和 H_y) 遵守同样的方程，而方程也适用于三个层区，其中 n 代表 n_1 、 n_2 、 n_3 ，这里假定 $n_1 > n_2 \geq n_3$ ，传播常数 β 在三个层区必须一致，这是边界上场的切向分量连续条件所要求的 (见 1.6 节)。求解微分方程式 (4.2-8) 和式 (4.2-9)，即可确定模场分布函数，而各层区微分方程解的形式由其特征方程的特征根决定。令 $\gamma^2 = n^2 K_0^2 - \beta^2$ ，若 $\gamma^2 > 0$ ，即微分方程特征根为虚数 $\pm i\gamma$ ，方程的解是余弦 (正弦) 函数；若 $\gamma^2 < 0$ ，特征根为实数 $\pm \sqrt{-\gamma^2}$ ，方程的解则为指数函数。另一方面还须考虑物理上的合理性，对于导波模，芯层的电磁场必然是振荡型的，即在 x 方向上呈驻波分布，而在衬底和覆盖层，电磁场必然是随离开界面的距离的增加而衰减的倏逝波。这就要求在芯层满足 $\gamma^2 = n_1^2 K_0^2 - \beta^2 > 0$ ，而在衬底和覆盖层一定要满足 $n_2^2 K_0^2 - \beta^2 < 0$ 和 $n_3^2 K_0^2 - \beta^2 < 0$ 。至此在电磁场方程的基础上，论证了导波的必要条件

$$n_2 K_0 < \beta < n_1 K_0 \quad (4.2-14)$$

依照导波条件，为后面的讨论方便，各层参数重新设置如下：

$$\kappa = \sqrt{n_1^2 K_0^2 - \beta^2} \quad (4.2-15)$$

$$p = \sqrt{\beta^2 - n_2^2 K_0^2} \quad (4.2-16)$$

$$q = \sqrt{\beta^2 - n_3^2 K_0^2} \quad (4.2-17)$$

芯层波矢的 x 分量为 K_x ， $K_x^2 = n_1^2 K_0^2 - \beta^2 = \kappa^2$ 。衬底和覆盖层中波矢的 x 分量分别为 K_{2x} 和 K_{3x} ， $K_{2x}^2 = n_2^2 K_0^2 - \beta^2 = -p^2$ ， $K_{3x}^2 = n_3^2 K_0^2 - \beta^2 = -q^2$ ，对导模而言，两介质层中的场为倏逝波， K_{2x} 和 K_{3x} 均为虚值。 κ 、 p 、 q 和 β 是场的特征常数， κ 是芯层中场在 x 方向的相位常数， p 、 q 分别是衬底和覆盖层中场沿 x 方向的衰减常数。

4.3 TE 模分析

TE 模只有三个场分量，电场中 E_y 为主要分量， H_x 、 H_z 由式 (4.2-10) 和式 (4.2-11) 确定。如图 4.3 所示波导，设芯层厚度 $d = 2a$ ，下面列出不同区域关于 E_y 的方程：

● 覆盖层 $\frac{d^2}{dx^2} E_y - q^2 E_y = 0 \quad (4.3-1)$

● 芯层 $\frac{d^2}{dx^2} E_y + \kappa^2 E_y = 0 \quad (4.3-2)$

● 衬底 $\frac{d^2}{dx^2} E_y - p^2 E_y = 0 \quad (4.3-3)$

分别求解，得到完整形式的空间场分布

$$E_y = \begin{cases} C e^{-q(x-a)} e^{-i\beta z} & (x > a) \\ A \cos(\kappa x + \varphi) e^{-i\beta z} & (-a < x < a) \\ B e^{p(x+a)} e^{-i\beta z} & (x < -a) \end{cases} \quad (4.3-4)$$

根据边界条件, 在 $x = \pm a$ 的界面上, 应满足切向分量 E_y 、 H_z 连续。由式 (4.2-11) 说明 $\frac{dE_y}{dx}$ 是连续的, 因此在界面 $x = a$ 上, 需满足

$$A \cos(\kappa a + \varphi) = C \quad (4.3-5)$$

$$\kappa A \sin(\kappa a + \varphi) = qC \quad (4.3-6)$$

两式相除, 得

$$\tan(\kappa a + \varphi) = q / \kappa \quad (4.3-7)$$

在界面 $x = -a$ 上, 需满足

$$A \cos(\kappa a - \varphi) = B \quad (4.3-8)$$

$$\kappa A \sin(\kappa a - \varphi) = pB \quad (4.3-9)$$

两式相除, 得

$$\tan(\kappa a - \varphi) = p / \kappa \quad (4.3-10)$$

对式 (4.3-7) 和式 (4.3-10) 取反函数, 得

$$\kappa a + \varphi = \arctan(q / \kappa) + m_1 \pi \quad (4.3-11)$$

$$\kappa a - \varphi = \arctan(p / \kappa) + m_2 \pi \quad (4.3-12)$$

其中 m_1 和 m_2 取整数, 将上面二式相加, 得

$$\kappa d = m\pi + \arctan(p / \kappa) + \arctan(q / \kappa) \quad (m = m_1 + m_2) \quad (4.3-13)$$

即

$$\kappa d = m\pi + \arctan \frac{\sqrt{\beta^2 - n_2^2 K_0^2}}{\kappa} + \arctan \frac{\sqrt{\beta^2 - n_3^2 K_0^2}}{\kappa} \quad (4.3-14)$$

上式称为 TE 模的特征方程, 与式 (4.1-9) 完全相同。特征方程是模参数 β 、 κ 和 m 必须遵循的方程, 其中, $m = 0, 1, 2, \dots$ 通常称为模序数, 规定各模名称为 TE_m , 如 TE_0 模、 TE_1 模等, 最低阶的 TE_0 模称作主模或基模。

将 $\beta^2 = n_1^2 K_0^2 - \kappa^2$ 代入式 (4.3-14), 有

$$\kappa d = m\pi + \arctan \frac{\sqrt{(n_1^2 - n_2^2) K_0^2 - \kappa^2}}{\kappa} + \arctan \frac{\sqrt{(n_1^2 - n_3^2) K_0^2 - \kappa^2}}{\kappa} \quad (4.3-15)$$

这是只含一个未知量 κ 的超越方程, 可进行数值求解; 或者将该方程写成只含 β 参数的方程再求解。

将式 (4.3-11) 与式 (4.3-12) 相减, 可求得

$$2\varphi = \arctan(q / \kappa) - \arctan(p / \kappa) + l\pi$$

其中, $l = m_1 - m_2$ 。因为 $m = m_1 + m_2$, 所以 m 和 l 具有相同的奇偶性。当 m 为偶数时, 上式可简化为

$$\varphi = \frac{1}{2} \arctan(q / \kappa) - \frac{1}{2} \arctan(p / \kappa) \quad (4.3-16)$$

当 m 为奇数时, l 也为奇数, $l/2$ 为半整数, 所以上式中 φ 角附加 $\pi/2$ 。不论是 TE 模还是 TM 模, 都可分为奇模和偶模, 根据 m 的奇偶而定。偶模的模场取 $\cos(\kappa x + \varphi)$, 奇模的模场取 $\sin(\kappa x + \varphi)$ 。

利用边界条件式 (4.3-5) 和式 (4.3-6), 以及式 (4.3-8) 和式 (4.3-9), 可以求出场量的几个待定常数的关系, 即

$$C = A \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + q^2}} \quad (4.3-17)$$

$$B = A \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + p^2}} \quad (4.3-18)$$

最后确定的 TE 模场分布为

$$E_y = Ae^{-i\beta z} \begin{cases} \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + q^2}} e^{-q(x-a)} & (x > a) \\ \cos(\kappa x + \varphi) & (-a < x < a) \\ \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + p^2}} e^{p(x+a)} & (x < -a) \end{cases} \quad (4.3-19)$$

其中幅度参数 A 由导模功率确定(见 4.6 节)。图 4.4 是导模电场 $E_y(x)$ 的分布示意图, 场幅最大值出现在芯层中, 显然, 模序数 m 也可以表征场量 E_y 在芯层中取零值的个数。如果 $n_2 = n_3$, 波导称为对称波导, 场分布也呈对称分布; 如果 $n_2 > n_3$, 则倏逝波在介质 2 中的穿透深度大于在介质 3 中的穿透深度, 场偏向介质 2 一侧。

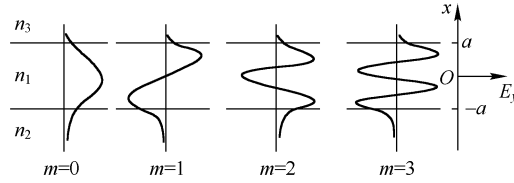


图 4.4 薄膜波导导模的电场分布

4.4 TM 模分析

对 TM 模, 三个场分量中以 H_y 为主要计算分量, 另外两个分量 E_x 和 E_z 由式 (4.2-12) 和式 (4.2-13) 确定。采取与 TE 模类似的分析方法, 列出 H_y 在各层区的方程并求解得到

$$H_y = \begin{cases} C'e^{-q(x-a)}e^{-i\beta z} & (x > a) \\ A'\cos(\kappa x + \varphi)e^{-i\beta z} & (-a < x < a) \\ B'e^{p(x+a)}e^{-i\beta z} & (x < -a) \end{cases} \quad (4.4-1)$$

根据边界条件, 在 $x = \pm a$ 界面上, 切向分量 H_y 、 E_z 均连续。由 $E_z = -\frac{i}{\omega\epsilon_0} \frac{1}{n^2} \frac{\partial H_y}{\partial x}$, 说明 $\frac{1}{n^2} \frac{\partial H_y}{\partial x}$ 连续, 因此

● 在界面 $x = a$ 上, 需满足

$$A'\cos(\kappa a + \varphi) = C' \quad (4.4-2)$$

$$\frac{1}{n_1^2} \kappa A' \sin(\kappa a + \varphi) = \frac{1}{n_3^2} q C' \quad (4.4-3)$$

两式相除, 得

$$\tan(\kappa a + \varphi) = \frac{n_1^2}{n_3^2} \frac{q}{\kappa} \quad (4.4-4)$$

● 在界面 $x = -a$ 上, 需满足

$$A'\cos(\kappa a - \varphi) = B' \quad (4.4-5)$$

$$\frac{1}{n_1^2} \kappa A' \sin(\kappa a - \varphi) = \frac{1}{n_2^2} p B' \quad (4.4-6)$$

同样, 二式相除, 得

$$\tan(\kappa a - \varphi) = \frac{n_1^2}{n_2^2} \frac{p}{\kappa} \quad (4.4-7)$$

对式(4.4-4)和式(4.4-7)取正切函数的反函数，经代数运算得到

$$\kappa d = m\pi + \arctan\left(\frac{n_1^2}{n_2^2} \frac{p}{\kappa}\right) + \arctan\left(\frac{n_1^2}{n_3^2} \frac{q}{\kappa}\right) \quad (4.4-8)$$

其中 $m=0,1,2,\dots$ 为非负整数。上式也可写成如下形式

$$\kappa d = m\pi + \arctan\left(\frac{n_1^2}{n_2^2} \frac{\sqrt{\beta^2 - n_2^2 K_0^2}}{\kappa}\right) + \arctan\left(\frac{n_1^2}{n_3^2} \frac{\sqrt{\beta^2 - n_3^2 K_0^2}}{\kappa}\right) \quad (4.4-9)$$

此式为 TM 模的特征方程。给定一个 m 值，可求出相应的模参数 β 或 κ ，从而确定一个 TM_m 模，主模为 TM_0 模。

由式(4.4-4)和式(4.4-7)可求出待定参数

$$\varphi = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{n_1^2}{n_3^2} \frac{q}{\kappa}\right) - \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{n_1^2}{n_2^2} \frac{p}{\kappa}\right) + \begin{cases} 0 & (m \text{ 为偶数}) \\ \pi/2 & (m \text{ 为奇数}) \end{cases} \quad (4.4-10)$$

根据 m 的奇偶，TM 模也分为奇模和偶模。

利用边界条件式(4.4-2)和式(4.4-3)，以及式(4.4-5)和式(4.4-6)，可以求出 TM 模场量的其他待定参数的关系

$$C' = A' \frac{\kappa n_3^2 / n_1^2}{\sqrt{(\kappa n_3^2 / n_1^2)^2 + q^2}} \quad (4.4-11)$$

$$B' = A' \frac{\kappa n_2^2 / n_1^2}{\sqrt{(\kappa n_2^2 / n_1^2)^2 + p^2}} \quad (4.4-12)$$

从而得到模场分布为

$$H_y = A' e^{-i\beta z} \begin{cases} \frac{\kappa n_3^2 / n_1^2}{\sqrt{(\kappa n_3^2 / n_1^2)^2 + q^2}} e^{-q(x-a)} & (x > a) \\ \cos(\kappa x + \varphi) & (-a < x < a) \\ \frac{\kappa n_2^2 / n_1^2}{\sqrt{(\kappa n_2^2 / n_1^2)^2 + p^2}} e^{p(x+a)} & (x < -a) \end{cases} \quad (4.4-13)$$

其中幅度参数 A' 同样由导波功率确定。其分布形式与图 4.4 所示相类似，只是图中场量表示的是 $H_y(x)$ 。

4.5 导模特性

4.5.1 导模截止

前面已经导出 TE 模和 TM 模的特征方程，并确定了模场分布。从中可以看出导模具有两个重要的特点：其一，因为 m 只能取非负整数，特征方程的解必然是分立的，所以导模的特征值 β 或 κ 都只能取分立值；其二，导模的模场在衬底和覆盖层都是呈指数衰减的，这就等效于壁垒作用，使模场被限制在芯层内。

通过对电磁场方程式(4.2-8)和式(4.2-9)的分析，可以证明导波条件，即导模存在的必要条件是 $n_2 K_0 < \beta < n_1 K_0$ 。因此，由 $\kappa^2 = n_1^2 K_0^2 - \beta^2$ ，可确定 κ 的取值范围为

$$0 < \kappa < \kappa_c \quad (4.5-1)$$

其中

$$\kappa_c = K_0 \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \quad (4.5-2)$$

然而，电磁场方程不可能仅仅存在导波解，当参数发生变化时，解的性质也会改变。如果 β 逐渐减小并趋于 $n_2 K_0$ ，则 κ 趋于 κ_c ，而衬底区的衰减参数 $p = \sqrt{\beta^2 - n_2^2 K_0^2}$ 趋于零，结果是衬底区模场逐渐增强，穿透深度逐渐增大；当 $\beta = n_2 K_0$ 时，随光波的传输，芯层电磁场能量会外泄而衰减。这种情况称为导模截止， κ_c 称为参数 κ 的截止上限，它仅与波导的物理参数和光波长有关。

如果 β 进一步减小，使 $\beta < n_2 K_0$ ，亦即 $\kappa > \kappa_c$ ，则 p 成为虚数，甚至 p 、 q 都成为虚数，这时 e^{px} 和 e^{-qx} 都将成为振荡因子，倏逝波变成辐射波，电磁波不仅向 z 轴方向传播，同时又在衬底和覆盖层沿 x 轴方向传播。这种场模式就是辐射模式。对于辐射模， β 可在 $[0, n_2 K_0]$ 区间连续取值，即辐射模谱是连续的。

4.5.2 导模定则

已有的分析都是针对 β 、 κ 、 p 、 q 四个模参数进行的，这些参数必须通过数值计算才能确定。但是，实际工作中，需要在已知波导结构参数 d 、 n_1 、 n_2 、 n_3 和入射光波长的基础上，在未经数值计算的条件下，对波导模式、导模数量以及导模与波长关系等特性，做出简单而可信的判断和预测。

为了探求一种简便的预测方法，有必要对导模的特征方程进行更细微的分析。现以 TE 模的特征方程

$$\kappa d = m\pi + \arctan \frac{\sqrt{(n_1^2 - n_2^2)K_0^2 - \kappa^2}}{\kappa} + \arctan \frac{\sqrt{(n_1^2 - n_3^2)K_0^2 - \kappa^2}}{\kappa}$$

为例，做如下分析。TM 模的分析只需做微小改动。

首先，定义方程的右侧函数为 $f_m(\kappa)$ ，即

$$f_m(\kappa) = m\pi + \arctan \frac{\sqrt{(n_1^2 - n_2^2)K_0^2 - \kappa^2}}{\kappa} + \arctan \frac{\sqrt{(n_1^2 - n_3^2)K_0^2 - \kappa^2}}{\kappa} \quad (4.5-3)$$

容易看出， m 给定时， $f_m(\kappa)$ 随 κ 的增大而单调下降， $f_m(\kappa)$ 是以 m 为序号的等间距的单调下降曲线族，如图 4.5 所示。在导模范围内，由 $0 < \kappa < \kappa_c$ ，有

$$f_m(0) \geq f_m(\kappa) \geq f_m(\kappa_c) \quad (4.5-4)$$

这里

$$f_m(0) = (m+1)\pi \quad (4.5-5)$$

$$f_m(\kappa_c) = m\pi + \varphi_c \quad (4.5-6)$$

其中

$$\varphi_c = \arctan \frac{\sqrt{n_2^2 - n_3^2}}{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}} \quad (4.5-7)$$

仅与波导的物理参数有关，与模式无关。

其次，方程的左侧 κd 是以 κ 为变量的线性递增函数，在 $(0, \kappa_c)$ 范围内

$$0 < \kappa d < \kappa_c d \quad (4.5-8)$$

因此，TE 模的特征方程表示为 $\kappa d = f_m(\kappa)$ ，直线 κd 与曲线族 $f_m(\kappa)$ 的交点就代表特征方程的解。

基于上述分析，可以建立导模定则，表述如下：

(1) 如果 $\kappa_c d > f_m(\kappa_c)$ ，即

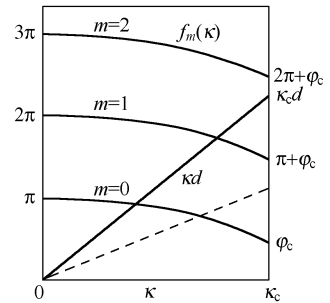


图 4.5 特征方程求解示意图

$$\kappa_c d > m\pi + \varphi_c \quad (4.5-9)$$

则在 $(0, \kappa_c)$ 范围内, 特征方程有 $m+1$ 个解, m 阶导模存在, 并且 m 以下各阶导模也一定存在。

(2) 如果 $\kappa_c d = f_m(\kappa_c)$, 则 κ_c 是特征方程的解, m 阶导模处于临界截止状态, m 以下各阶导模存在。

(3) 如果 $\kappa_c d < f_m(\kappa_c)$, 即

$$\kappa_c d < m\pi + \varphi_c \quad (4.5-10)$$

则在 $(0, \kappa_c)$ 范围内, m 阶导模不存在, 并且 m 以上各阶导模也不存在。

下面对导模定则做简要证明: 因为 κd 是单调上升函数, $f_m(\kappa)$ 是单调下降函数, 因而 $F_m(\kappa) = \kappa d - f_m(\kappa)$ 必定是单调上升函数, 并始终有 $F_m(0) = -(m+1)\pi < 0$, 若 $F_m(\kappa_c) = \kappa_c d - f_m(\kappa_c) > 0$, 单调连续函数 $F_m(\kappa)$ 在区间端点取值一正一负, 中间必有零点存在, 因此, (1)成立。反之, 若 $F_m(\kappa_c) < 0$, 两端取值全为负, 则在区间内不可能存在零点, 因此, (3)成立。

对 TM 模的特征方程进行同样的分析, 只需对 φ_c 做如下修改, 即可适用于以上的讨论

$$\varphi'_c = \arctan \frac{n_1^2 \sqrt{(n_2^2 - n_3^2)}}{n_3^2 \sqrt{(n_1^2 - n_2^2)}} \quad (4.5-11)$$

所以, TM_m导模存在的条件是

$$\kappa_c d > m\pi + \varphi'_c \quad (4.5-12)$$

4.5.3 导模数量

由特征方程和图 4.5 可以看出, 当 m 增加时会导致方程的根增大, 并逐渐接近截止限 κ_c , 因此相对而言, 高阶模靠近截止区, 而低阶模远离截止区。可以预料导模阶数 m 必然存在一个上限, 也就是说导模数量是有限的。具体分析需依据导模定则进行推断。

根据式(4.5-9), 并将 $\kappa_c = K_0 \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$, $K_0 = 2\pi/\lambda$ 代入, 得到 TE 偏振状态下导模定则的具体形式为

$$\frac{2\pi d}{\lambda} \sqrt{n_1^2 - n_2^2} > m\pi + \varphi_c \quad (4.5-13)$$

因此有

$$m < \frac{2d}{\lambda} \sqrt{n_1^2 - n_2^2} - \varphi_c / \pi \quad (4.5-14)$$

因为 m 只能取整数, 所以 TE 模导模的最高限为

$$m_c = \text{int} \left[\frac{2d}{\lambda} \sqrt{n_1^2 - n_2^2} - \varphi_c / \pi \right] \quad (4.5-15)$$

int 表示对数值取整。同样地, TM 模的导模最高限为

$$m'_c = \text{int} \left[\frac{2d}{\lambda} \sqrt{n_1^2 - n_2^2} - \varphi'_c / \pi \right] \quad (4.5-16)$$

式中, φ_c 和 φ'_c 都是仅与折射率有关的常数, 取值均小于 $\pi/2$ 。已知上限值 m_c 和 m'_c , 即可求出可传播的 TE 和 TM 导模总数

$$M = m_c + m'_c + 2 \quad (4.5-17)$$

作为估计值可近似为

$$M = \frac{4d}{\lambda} \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \quad (4.5-18)$$

可见, 导模数目与波导的工作波长成反比, 一般光通信系统中光波长确定为 $0.85\mu\text{m}$ 、

1.31 μm 、1.55 μm ，在工作波长确定的条件下，导模数量主要决定于波导的厚度以及芯层与衬底的折射率差，通常较厚的芯层和较大的折射率差，都会导致多模式传输。

4.5.4 单模传输

实际工程中经常会提出单模传输的要求，利用导模定则可以方便地讨论这一问题。对 TE 模，若 m 满足不等式 (4.5-13)，则 $m-1$ 也会满足该不等式，所以可以断言，任何非零阶的导模都不可能单独传输，唯一可能单独传输的导模只有最低阶模 TE₀。对确定频率的光波，适当选择波导尺寸使高阶模截止而只传输主模，即为单模传输。允许主模和一个或多个高阶模同时传输的情况称为多模传输。为使 TE₀ 模单模运行，必须同时满足 TE₀ 模的导模条件和 TE₁ 模的截止条件，即满足下列不等式

$$\varphi_c < \frac{2\pi d}{\lambda} \sqrt{n_1^2 - n_2^2} < \pi + \varphi_c \quad (\text{TE}_0) \quad (4.5-19)$$

同样，对 TM 模式，单模传输时只能是 TM₀ 模，单模条件为

$$\varphi'_c < \frac{2\pi d}{\lambda} \sqrt{n_1^2 - n_2^2} < \pi + \varphi'_c \quad (\text{TM}_0) \quad (4.5-20)$$

因为 φ_c 和 φ'_c 的值非常接近，如果是对称光波导，即衬底和覆盖层为同一种介质 ($n_2 = n_3$)，这时 $\varphi_c = \varphi'_c = 0$ 。所以，工程精度一般很难分离 TE₀ 模和 TM₀ 模，通常意义下的单模传输是指 TE₀ 和 TM₀ 两主模共存的一种非偏振的传输模式。采用 x 或 y 方向的偏振光波激励光波导模式，可以实现 TE 偏振或 TM 偏振的单模传输。也有在波导表面加金属覆层的，这时，TE₀ 模的传输损耗非常小，而使 TM₀ 模产生较大的损耗，从而可轻易地将 TM₀ 模除去，仅有 TE₀ 模通过，这就是光波导型偏振器。

4.5.5 截止波长

式 (4.5-13) 是一个多参量的关系式，它能显现各波导参量互相制约的关系。在折射率参数确定的情况下， m 、 λ 、 d 中任意两个参数确定了，第三个参数就会受到限制。例如我们已经讨论了 m 存在上限的问题，同样 λ 也有上限，称作截止波长，而 d 有下限，称为截止厚度。在此仅简略讨论 λ 的上限问题。由式 (4.5-13) 可直接得到

$$\lambda < \lambda_c = \frac{2\pi d \sqrt{n_1^2 - n_2^2}}{m\pi + \varphi_c} \quad (\text{TE}) \quad (4.5-21)$$

$$\text{对 TM 模同样有} \quad \lambda < \lambda'_c = \frac{2\pi d \sqrt{n_1^2 - n_2^2}}{m\pi + \varphi'_c} \quad (\text{TM}) \quad (4.5-22)$$

式中， λ_c 和 λ'_c 分别是 TE _{m} 模和 TM _{m} 模的截止波长。显然高阶模具有较短的截止波长，而低阶模的截止波长相对较长。在导模系列中零阶模的截止波长最大，最不容易截止

$$\lambda_{c(\text{TE}_0)} = 2\pi d \sqrt{n_1^2 - n_2^2} / \varphi_c \quad (4.5-23)$$

$$\lambda'_{c(\text{TM}_0)} = 2\pi d \sqrt{n_1^2 - n_2^2} / \varphi'_c \quad (4.5-24)$$

如果是对称波导，由于 $\varphi_c = \varphi'_c = 0$ ，所以 TE₀ 模和 TM₀ 模的截止波长都是无限大，或者说对称波导的零阶模在任何波长条件下都不截止。波导的光波长存在截止上限，主要是因为当波长超限时， κ_c 变小，使式 (4.5-9) 中的 $\kappa_c d$ 不能大于 $m\pi + \varphi_c$ ，导致特征方程的 m 阶模无解。在图 4.5 中，如果 κd 为虚线所示，则 TE₁ 模截止。

4.5.6 归一化参量与薄膜波导色散曲线

直接求解特征方程，可以得到具体波导的导模传输特性。为减少波导参数的数量，使得到的结果适用于所有均匀介质薄膜波导，以便更有利于波导的优化设计。下面定义两个参量，即归一化传播常数 B 和归一化频率 V

$$B = \frac{\bar{\beta}^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2} \quad (4.5-25)$$

$$V = K_0 d \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \quad (4.5-26)$$

根据导模条件可知 $0 < B < 1$ 。无量纲参数 V 与波导芯层厚度 d 成正比，也称为归一化波导厚度，是一个重要的用于波导设计的参数。为描述波导结构的非对称性，再引入一个非对称参量 α

$$\alpha = \frac{n_2^2 - n_3^2}{n_1^2 - n_2^2} \quad (4.5-27)$$

α 在 0 (对称波导) 至 ∞ (极不对称波导) 之间变化。这样薄膜波导 TE 模的特征方程式 (4.3-14) 或式 (4.3-15) 可改写为

$$V\sqrt{1-B} = m\pi + \arctan \sqrt{\frac{B}{1-B}} + \arctan \sqrt{\frac{\alpha+B}{1-B}} \quad (4.5-28)$$

与原方程比较，方程参数减少了三个，以 m 和 α 为参变量，解上述特征方程，得到导模的 B 与 V 的关系曲线，即薄膜波导的归一化色散曲线，或称传输曲线，如图 4.6 所示，取非对称参量 $\alpha=0, 1, 5, \infty$ 。当模处于截止状态时， $B=0$ ，根据式 (4.5-28)，TE_{*m*} 模的归一化频率 V 的截止限为

$$V_{m,c} = m\pi + \arctan \sqrt{\alpha} \quad (4.5-29)$$

只要确定了波导参数和光波长， V 值就是确定的了。所以，如果满足 $V_{m,c} < V < V_{m+1,c}$ ，那么 TE_{*m*} 及以下的模全是导模，共有 $m+1$ 个导模，而 TE_{*m+1*} 及以上的模全部截止。当归一化频率满足 $\arctan \sqrt{\alpha} < V < \pi + \arctan \sqrt{\alpha}$ 时，则可以实现 TE 模的单模传播。

$$\text{TE}_0 \text{ 模的截止限为 } V_{0,c} = \arctan \sqrt{\alpha} \quad (4.5-30)$$

即在非对称波导中，如果 $V < V_{0,c}$ ，那么任何 TE 模都不能传播；而在对称波导中，TE₀ 模不截止，而且单模条件为 $V < \pi$ ，即 $K_0 d \sqrt{n_1^2 - n_2^2} < \pi$ 。据此，可以进行波导设计，例如，当 $n_1=1.52$ ， $n_2=n_3=1.50$ 时，对 $\lambda=1.53\mu\text{m}$ 的光波，单模波导的芯层厚度不能超过 $3.11\mu\text{m}$ 。同样的波导折射率，当 $\lambda=0.85\mu\text{m}$ 时，单模传输的芯层厚度要小于 $1.73\mu\text{m}$ 。

TM 模的情况，特征方程可改写为

$$V\sqrt{1-B} = m\pi + \arctan \left(\frac{n_1^2}{n_2^2} \sqrt{\frac{B}{1-B}} \right) + \arctan \left(\frac{n_1^2}{n_3^2} \sqrt{\frac{\alpha+B}{1-B}} \right) \quad (4.5-31)$$

与式 (4.4-9) 相比，方程只减少了一个参数，还需要知道 m 、 n_1 、 n_2 、 n_3 四个参量才能进行数值求解，得到 B 与 V 的关系。

当薄膜波导的 $n_1=1.64$ ， $n_2=n_3=1.51$ 时，其 TE 模和 TM 模的归一化色散曲线如图 4.7 所示。相同的波导参数下，通常 TE 模的归一化传播常数略大于 TM 模。由式 (4.5-31) 可知，TM_{*m*} 模的归一化频率截止限为

$$V_{m,c} = m\pi + \arctan \frac{n_1^2}{n_3^2} \sqrt{\alpha} \quad (4.5-32)$$

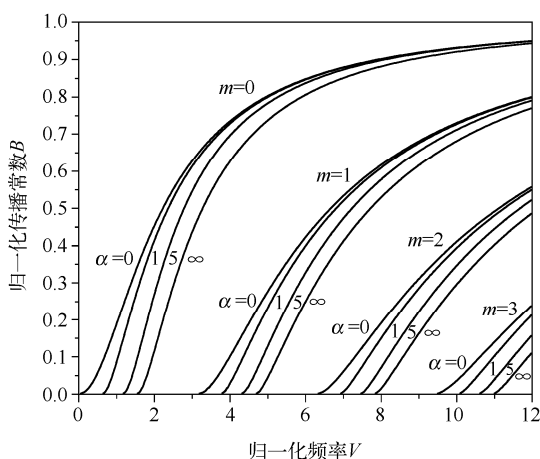


图 4.6 薄膜波导 TE 模归一化色散曲线

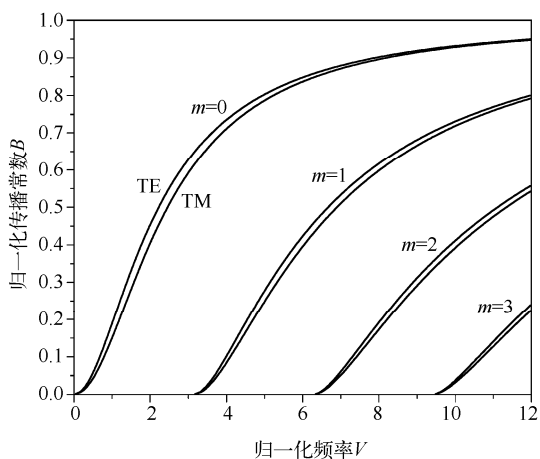


图 4.7 薄膜波导 TE 模与 TM 模归一化色散曲线

在对称波导中， TE_m 模与 TM_m 模的截止限相同。对于弱波导，当相对折射率差 $\Delta \ll 1$ 时， TE_m 模和 TM_m 模有近似相同的传播常数，可以认为是简并的。

4.6 导模光强和功率

4.6.1 导模光强

光波传输过程中必然伴随着能量的传输，因而每一导波模式都携带有一定的能量。为了研究导模的能量传输特性，有必要首先分析波导横截面上的光强分布。已知坡印亭矢量 $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ ，它代表电磁场的瞬态能流密度，为了得到实际光强，需要进行适当的时间平均。另一方面，现有电磁理论中 \vec{E} 和 \vec{H} 都以复数形式表示，特别是还包含经常被省略的 $e^{i\omega t}$ 因子，所以对它们的二次形式的运算必须进行实数化处理

$$\vec{S} = \text{Re}(\vec{E}) \times \text{Re}(\vec{H}) = \frac{1}{2}(\vec{E} + \vec{E}^*) \times \frac{1}{2}(\vec{H} + \vec{H}^*)$$

注意到在展开式的 4 项中， $\vec{E} \times \vec{H}$ 和 $\vec{E}^* \times \vec{H}^*$ 两项分别含有 $e^{i2\omega t}$ 和 $e^{-i2\omega t}$ 因子，因此时间平均值为零，由此可得到平均能流密度

$$\bar{\vec{S}} = \frac{1}{4}(\vec{E} \times \vec{H}^* + \vec{E}^* \times \vec{H}) = \frac{1}{2}\text{Re}(\vec{E} \times \vec{H}^*) \quad (4.6-1)$$

为求出导波截面上的光强分布，只须涉及 \bar{S}_z

$$\bar{S}_z = \frac{1}{2}\text{Re}(E_x H_y^* - E_y H_x^*) \quad (4.6-2)$$

现在以 TE 模为例，其场分量包含 E_y 、 H_x 、 H_z ，其他分量为零，按照式 (4.2-10)，

$H_x = -\frac{\beta}{\omega\mu} E_y$ ，可以导出光强

$$I = -\frac{1}{2}\text{Re}(E_y H_x^*) = \frac{\beta}{2\omega\mu} E_y E_y^* \quad (4.6-3)$$

E_y 在空间的分布已由式 (4.3-19) 给出，将其代入上式，得到薄膜波导 TE 模的光强分布为

$$I = \frac{\beta A^2}{2\omega\mu} \begin{cases} \frac{\kappa^2}{\kappa^2 + q^2} e^{-2q(x-a)} & (x > a) \\ \cos^2(\kappa x + \varphi) & (-a < x < a) \\ \frac{\kappa^2}{\kappa^2 + p^2} e^{2p(x+a)} & (x < -a) \end{cases} \quad (4.6-4)$$

波导内最大光强值为
$$I_0 = \frac{\beta A^2}{2\omega\mu} \quad (4.6-5)$$

三个低阶模的光强分布如图 4.8 所示，光强的极大值 I_0 出现在芯层，对于非对称波导，峰值将偏向衬底和覆盖层中折射率较大的一侧。

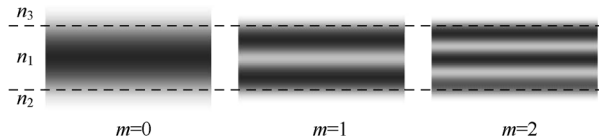


图 4.8 薄膜波导中的光强分布

4.6.2 传输功率

我们知道，光强或坡印亭矢量 z 分量的大小，代表单位时间通过单位波导截面的电磁波的能量，所以，传输功率的计算需要限定积分的区域。薄膜波导理论中未确定波导的有限边界， x 方向的积分可通过指数衰减函数而自动收敛，但是在 y 方向，函数的均匀性要求人为地设置波导的宽度。实际的波导可能有不同的宽度，而有意义的理论工作只需要单位宽度内的功率。下面的计算中，设 y 方向的宽度为 1 个长度单位。这样，芯层传输的功率为

$$\begin{aligned} P_1 &= I_0 \int_{-a}^a \cos^2(\kappa x + \varphi) dx \\ &= I_0 a + \frac{I_0}{4\kappa} [\sin 2(\kappa a + \varphi) + \sin 2(\kappa a - \varphi)] \end{aligned}$$

利用式 (4.3-5) ~ 式 (4.3-9) 及式 (4.3-17) 和式 (4.3-18)，得

$$P_1 = \frac{I_0}{2} \left[d + \frac{q}{\kappa^2 + q^2} + \frac{p}{\kappa^2 + p^2} \right] \quad (4.6-6)$$

同理，衬底和覆盖层中传输的功率分别为

$$P_2 = \frac{I_0 \kappa^2}{\kappa^2 + p^2} \int_{-\infty}^{-a} e^{2p(x+a)} dx = \frac{I_0}{2} \frac{\kappa^2 / p}{\kappa^2 + p^2} \quad (4.6-7)$$

$$P_3 = \frac{I_0 \kappa^2}{\kappa^2 + q^2} \int_a^{\infty} e^{-2q(x-a)} dx = \frac{I_0}{2} \frac{\kappa^2 / q}{\kappa^2 + q^2} \quad (4.6-8)$$

波导单位宽度内传输的总功率为

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{I_0}{2} \left[d + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right] = \frac{I_0}{2} d_{\text{eff}} \quad (4.6-9)$$

其中有效厚度为

$$d_{\text{eff}} = d + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \quad (4.6-10)$$

以上结果说明，衬底和覆盖层内的“倏逝波”不仅参与导模场的传播，同时也携带一定份额的功率，“倏逝波”的存在使导模场的有效厚度在芯层几何厚度的基础上增加了 $1/p + 1/q$ ，二者恰是场值由芯层表面向衬底和覆盖层衰减至 $1/e$ 的距离，即分别是衬底和覆盖层中倏逝波

的穿透深度,如图 4.9 所示。导模远离截止时, p 、 q 较大, 能量主要在芯层中传输; 而对于近截止的导模, p 、 q 减小, 有效厚度会增大, 在衬底和覆盖层内的功率份额也会增加。由式 (4.6-9) 还可以看出, 在有效厚度范围内, 导模光强的平均值恰为峰值光强的一半。

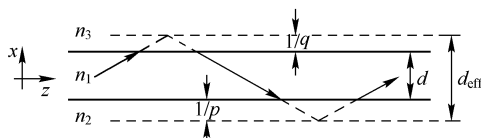


图 4.9 薄膜波导的有效厚度

习题

4-1 基本概念: 导模, 辐射模, 导模条件, 衰减常数, 波导特征方程, TE 模, TM 模, 模截止, 截止波长, 单模传输, 波导有效厚度, 归一化频率, 归一化传播常数, 光波导归一化色散曲线。

4-2 推导出薄膜波导电磁场的分量方程, 并说明薄膜波导的模式是根据什么分类的?

4-3 根据 Helmholtz 方程, 证明导模条件。

4-4 由波动光学观点, 给出薄膜波导导模的截止条件。从这一条件出发, 利用导模特征方程讨论截止波长 λ_c 和单模传输条件。

4-5 平面薄膜波导, 厚度为 d , 波长为 λ , 设 $n_1 > n_2 = n_3$ 。

(1) 写出 TE 模和 TM 模的特征方程及截止状态特征方程;

(2) 讨论导模条件中 d, λ, m 三个参数的制约关系, 当任意两个参数固定时, 确定第三个参数的上下界限;

(3) 设 $n_1=1.7$, $n_2=n_3=1.5$, 在 $d=\lambda, 2\lambda, 3\lambda$ 三种情况下, 分别求出可传输的导模序列;

(4) 对 (3) 中的折射率取值, 若只允许 $1.5\mu\text{m}$ 光波的基模 (TE_0 和 TM_0) 传输, 求薄膜厚度 d 的取值范围。

4-6 要制备一个 GaAs 平板波导, 工作波长 $\lambda_0=1.15\mu\text{m}$, 结构如图 4-10 所示, 设波导厚度 $d=3\mu\text{m}$, 如果 $n_1-n_3 \gg n_1-n_2$, $n_1=3.4$, 即属于强非对称波导。则 n_1-n_2 在什么范围内能保证波导单模工作。若工作波长改为 $1.06\mu\text{m}$, n_1-n_2 的范围又应如何?

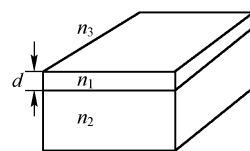


图 4.10 习题 4-6 的图

4-7 如图 4-10 所示的平板波导, $n_1=1.55$, $n_2=1.54$, $n_3=1.0$, 保证波导始终为单模传输, 在波长 $1.5\mu\text{m}$ 的 TE 偏振基模情况下, 计算:

(1) 非对称参量;

(2) 指出模色散曲线上哪些点对应单模波导在衬底和覆盖层中的模穿透深度的最大值和最小值(参考图 4.6 所示的归一化色散曲线);

(3) 计算这些点的归一化频率;

(4) 计算这些点的芯层厚度;

(5) 计算上述厚度下模的有效折射率;

(6) 计算覆盖层中场的衰减常数和穿透深度;

(7) 计算衬底中场的衰减常数和穿透深度。

4-8 如果平面波导支持最低阶 TE 模式, 求需要的平面波导的最小厚度(其中, 真空波长为 880nm , 波导折射率为 3.5, 衬底折射率为 3.38, 周围为空气)。如果波导的厚度变为原来的 2 倍, 而其他所有的参数保持不变, 那么能够支持多少个 TE 模式。

第 5 章 三维光波导

薄膜波导，或者当波导的横向宽度比其厚度大得多时的近似薄膜波导，电磁场仅在一个方向受到限制，而在另一个方向不受限制，属于一维限制的二维波导。由于波导中的光可以沿非束缚方向自由传播，那么光就有可能因为衍射而被散失掉。实际光学器件中，如应用于半导体激光器以及光集成技术中的光耦合器、光调制器、滤波器、波分复用器、光开关等领域中的光波导，无论是在厚度方向还是在宽度方向，电磁场都受到限制，因此属于二维限制的三维光波导，也称沟道波导或条形波导。三维光波导是光集成器件的重要构成元器件，是集成光学的基础，因此，对其导模传输特性进行分析是十分重要的。这种二维受限电磁场的分析要比一维问题复杂得多，很难得到严格的解析解，一般都采用近似分析，高精度分析计算需采用数值方法。本章将用两种近似解析方法分析三维波导：一是用马卡提里 (Marcatili) 方法分析上升式、埋入式和嵌入式的矩形截面波导的特征方程和模式特性，二是用有效折射率法对脊形波导和条载波导进行简要分析。

5.1 三维光波导结构

图 5.1 为几种常见三维光波导的结构示意图，其中芯区折射率 n_1 最大，加载条介质折射率 n_4 大于周围覆层折射率 n_3 。

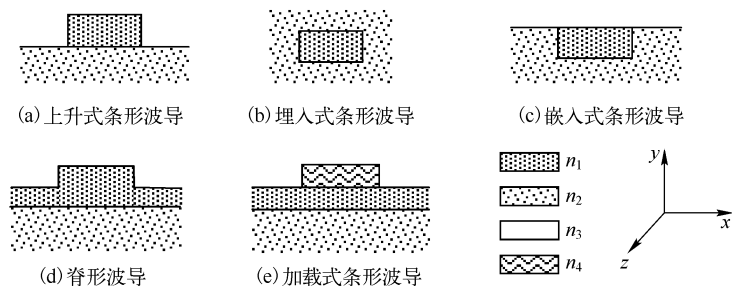


图 5.1 几种常见的三维光波导

上升式条形波导和脊形波导通常是先在衬底上通过热扩散、溅射沉积、化学气相沉积、旋转涂敷、外延生长等方法制作出二维波导，再经过掩膜刻蚀而获得。埋入式条形波导，是对称波导，其芯区被折射率较小的同种介质所包围，如置于空气中的矩形介质条，也可在上升式条形波导上沉积与衬底相同的介质而得到。嵌入式条形波导是在附有波导掩膜的衬底表面上，通过热扩散、离子交换、离子注入或者激光照射等方法形成高折射率的波导层，这种波导表面光滑，损耗较小。条载波导即加载式条形波导，也称光学带线波导，是在衬底上依次制备芯层和加载层，形成二维光波导，再对加载层进行掩膜刻蚀而获得。与有空气覆盖的芯层部分相比，覆盖有加载条的芯层部分，光的有效折射率会增大，从而在 x 方向亦将电磁场加以限制。关于光波导的制备将在第 12 章详细介绍。

图 5.1 中严格的矩形截面波导，实际上是做不到的。大多数波导需要用化学刻蚀方法或离子束刻蚀方法制备，由于工艺的原因，光波导刻蚀过程中不可避免地会出现侧蚀，得到的往往是梯形、倒梯形或更复杂截面的波导。对于用热扩散、离子交换、离子注入等方法获得的波

导, 折射率也不是均匀的, 在交界面上不是突变的, 而是渐变的。所以, 分析三维波导要比二维的复杂很多, 想得出严格的解析解是困难的, 只能在一些近似的条件下, 得到近似的解析形式的解。要得到高精确度的解还需采用数值计算方法。

5.2 马卡提里近似法

各种矩形截面的条形波导, 截面和坐标均可用图 5.2 表示, 波导截面可划分成 9 个区域, 12 个边界。区域 I 是波导芯区, 其宽度和厚度分别为 a 、 b , 折射率为 n_1 , II、III、IV、V 四个边区折射率分别为 n_2 、 n_3 、 n_4 、 n_5 , 假设所有材料各向同性且均匀, 此外还有图中阴影所示的四个角区。条形波导的严格分析是求满足十分复杂的边界条件的 Maxwell 方程的解, 这里需要写出 9 个区域中波动方程的可能解, 然后考虑在所有的边界上, 电场强度和磁场强度的切向分量连续, 才能得到波导场解的特征方程, 进而求得各区域内的电磁场分布, 显然这一严格的求解方法过程是极为繁复的。为了简化分析过程, 并能得出简单实用且精度高的解析公式, 做如下的近似:

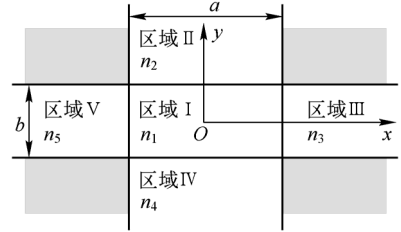


图 5.2 矩形截面介质波导及其分区

(1) 在波导的传输模式满足远离截止的条件下, 传播常数 β 接近 $n_1 K_0$, 周围区域的电磁场强度随离芯区界面距离的增大而快速减小, 即穿透深度很小, 电磁场很弱, 波导内电磁波的大部分功率被约束在芯区内传输, 边区内传输的功率很小, 四个角区内传输的功率更小。因此, 在分析矩形截面波导时, 可以忽略角上区域内的场, 仅考虑芯区和 4 个边区, 以及 4 个边界条件即可。这一近似处理方法是马卡提里 (Marcatili) 在 1969 年提出的, 该方法分析过程简单, 物理概念、物理图像清晰, 精确度较高, 至今仍被广泛应用。

(2) 由于波导芯区的折射率 n_1 最大, 如果各区折射率均满足

$$\frac{n_1 - n_i}{n_1} \ll 1 \quad (i=2,3,4,5) \quad (5.2-1)$$

这称作弱导近似条件。实际的多数光波导均满足这一条件。

对三维波导, 电磁场二维受限, 波导中不存在纯的 TE 偏振模式或 TM 偏振模式, 只存在混合模式。但在弱导条件下, 可以证明, 波导中导波模式的场的纵向分量比横向分量小得多, 因此近似为准 TEM 模式, 并存在两种基本偏振模式。一种模式是横向场分量的主要分量为 E_x 和 H_y , 而 E_y 和 H_x 很小, 此时电场近似沿 x 方向偏振, 称作 E_{mn}^x 模式; 另一种模式是横向场分量的主要分量为 E_y 和 H_x , 而 E_x 和 H_y 很小, 此时电场近似沿 y 方向偏振, 称作 E_{mn}^y 模式。下角标 m 、 n 代表 x 、 y 方向的模序数。

图 5.2 所示矩形波导的近似分析, 可以把矩形波导等效成互相垂直的、彼此独立的两个平面薄膜波导的组合, 称双波导近似, 如图 5.3 所示。矩形导波模式是薄膜波导的 TE 模和 TM 模的混合。 E_{mn}^x 模等效成厚度为 b 的水平波导的 TE 模和厚度为 a 的竖直波导的 TM 模的叠加, 场分量有 E_x 、 H_y 、 E_z 、 H_z 。 E_{mn}^y 模等效成厚度为 b 的水平波导的 TM 模和厚度为 a 的竖直波导的 TE 模的叠加, 场分量有 E_y 、 H_x 、 E_z 、 H_z 。利用前面薄膜波导的特征方程, 分别写出相应的 TE 模、TM 模的特征方程, 两方程联立即得到矩形波导的特征方程。建立时需注意芯区波矢的 x 分量 K_x 与竖直波导相关联, 波矢的 y 分量 K_y 与水平波导相关联。

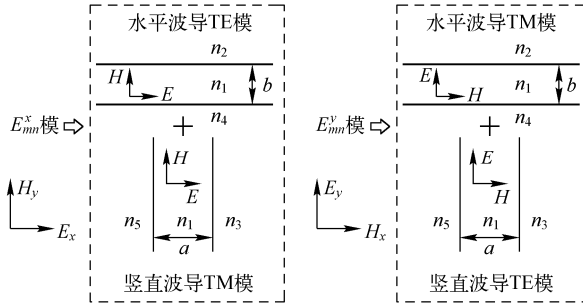


图 5.3 矩形波导的双平面薄膜波导近似

5.3 场方程与形式解

三维正规波导，折射率分布沿 z 方向是均匀的，沿 z 方向传输的电磁场的波函数可表示为

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(x, y) e^{i\omega t - i\beta z} \quad (5.3-1)$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}(x, y) e^{i\omega t - i\beta z} \quad (5.3-2)$$

根据电磁场的基本方程 $\nabla \times \vec{E} = -i\omega\mu\vec{H}$ 和 $\nabla \times \vec{H} = i\omega\varepsilon\vec{E}$ ，并考虑到 $\partial/\partial z = -i\beta$ ，给出方程的分量形式如下

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y} E_z + i\beta E_y = -i\omega\mu H_x \\ i\beta E_x + \frac{\partial}{\partial x} E_z = i\omega\mu H_y \\ \frac{\partial}{\partial x} E_y - \frac{\partial}{\partial y} E_x = -i\omega\mu H_z \end{cases} \quad (5.3-3)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y} H_z + i\beta H_y = i\omega\varepsilon E_x \\ i\beta H_x + \frac{\partial}{\partial x} H_z = -i\omega\varepsilon E_y \\ \frac{\partial}{\partial x} H_y - \frac{\partial}{\partial y} H_x = i\omega\varepsilon E_z \end{cases} \quad (5.3-4)$$

在分区均匀的波导中，在直角坐标系下，电磁场的任一分量 $u(\vec{r}, t) = u(x, y) e^{i\omega t - i\beta z}$ 均满足 Helmholtz 方程

$$\nabla^2 u(\vec{r}, t) + n^2 K_0^2 u(\vec{r}, t) = 0 \quad (5.3-5)$$

即

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u(x, y) + (n^2 K_0^2 - \beta^2) u(x, y) = 0 \quad (5.3-6)$$

在不同区域，波数为 $K_i = n_i K_0$ ，波矢分量为 K_{ix} 、 K_{iy} 、 K_{iz} ，并有

$$K_{ix}^2 + K_{iy}^2 + K_{iz}^2 = n_i^2 K_0^2 \quad (i=1,2,3,4,5) \quad (5.3-7)$$

根据式 (1.6-1) ~ 式 (1.6-3) 的关于边界条件的分析，各区的波矢分量有下列关系

$$K_{1z} = K_{2z} = K_{3z} = K_{4z} = K_{5z} = \beta \quad (5.3-8)$$

$$K_{1x} = K_{2x} = K_{4x} = K_x \quad (5.3-9)$$

$$K_{1y} = K_{3y} = K_{5y} = K_y \quad (5.3-10)$$

采用分离变量法求解方程式 (5.3-6)。设 $u(x, y) = X(x)Y(y)$ ，代入式 (5.3-6)，得

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} X + K_x^2 X = 0 \quad (5.3-11)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} Y + K_y^2 Y = 0 \quad (5.3-12)$$

波导内的导模场，芯区内沿 x 、 y 轴方向都应呈驻波分布，区域 II、IV 内沿 y 轴方向应呈衰减状态，区域 III、V 内沿 x 轴方向呈衰减状态。因此，上面二方程的解采取余弦函数和指数函数的形式，得到各区域的场分布，见图 5.4。

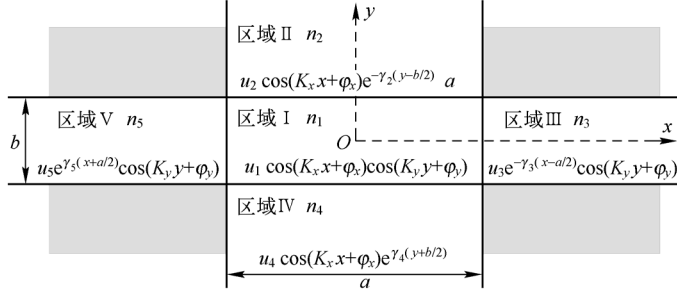


图 5.4 矩形波导各区域内的场分布

图 5.4 中的各表达式中有许多待定参量，其中 $u_1 \sim u_5$ 为场幅系数， K_x 和 K_y 为特征参量， $\gamma_2 \sim \gamma_5$ 为各边区衰减常数。结合式 (5.3-7) ~ 式 (5.3-10)，各参量之间满足如下关系

$$\beta^2 = n_1^2 K_0^2 - K_x^2 - K_y^2 \quad (5.3-13)$$

$$\gamma_2^2 = -K_{2y}^2 = (n_1^2 - n_2^2) K_0^2 - K_y^2 \quad (5.3-14)$$

$$\gamma_3^2 = -K_{3x}^2 = (n_1^2 - n_3^2) K_0^2 - K_x^2 \quad (5.3-15)$$

$$\gamma_4^2 = -K_{4y}^2 = (n_1^2 - n_4^2) K_0^2 - K_y^2 \quad (5.3-16)$$

$$\gamma_5^2 = -K_{5x}^2 = (n_1^2 - n_5^2) K_0^2 - K_x^2 \quad (5.3-17)$$

上述各式说明， γ_2 、 γ_4 只与 K_y 有关， γ_3 、 γ_5 只与 K_x 有关。导模场需满足 K_x 、 K_y 、 γ_2 、 γ_3 、 γ_4 、 γ_5 均为正实数。表达式中的 φ_x 和 φ_y 是待定相位因子，决定芯区场量极值的位置。如果波导对称，当 $n_3 = n_5$ 时 $\varphi_x = 0$ ，电磁场的极值在 y 轴上或关于 y 轴对称的位置上；当 $n_2 = n_4$ 时 $\varphi_y = 0$ ，场极值在 x 轴上或关于 x 轴对称的位置上。上面所有待定参量都需要通过边界条件加以确定，才能最终给出场的分布函数。下面将对两种偏振模式做详细分析。

5.4 E_{mn}^x 模特征方程

该模式电磁场的主要分量是 E_x 、 H_y ，纵向分量 E_z 、 H_z 比较小，另外两个横向分量 E_y 、 H_x 更小，因此，认为 $E_y = 0$ 或者 $H_x = 0$ 是完全可以的。这里设定 $H_x = 0$ ，取 H_y 作为计算分量，那么其他分量均能用 H_y 表示。利用式 (5.3-3) 和式 (5.3-4)，考虑到 $\nabla \cdot \vec{H} = 0$ ，可得

$$H_x = 0 \quad (5.4-1)$$

$$H_z = -\frac{i}{\beta} \frac{\partial}{\partial y} H_y \quad (5.4-2)$$

$$E_x = \frac{1}{\omega \epsilon_0 n^2 \beta} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + n^2 K_0^2 \right) H_y \quad (5.4-3)$$

$$E_y = \frac{1}{\omega \varepsilon_0 n^2 \beta} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} H_y \quad (5.4-4)$$

$$E_z = -\frac{i}{\omega \varepsilon_0 n^2} \frac{\partial}{\partial x} H_y \quad (5.4-5)$$

在界面 $x = \pm a/2$ 上, H_y 、 E_z 连续, 由式 (5.4-5) 可知, $\frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial x} H_y$ 也是连续的。

● 对于界面 $x = a/2$, 有

$$\left. \begin{aligned} H_{y1} \cos(K_x a/2 + \varphi_x) &= H_{y3} \\ \frac{1}{n_1^2} K_x H_{y1} \sin(K_x a/2 + \varphi_x) &= \frac{\gamma_3}{n_3^2} H_{y3} \end{aligned} \right\}$$

得
$$\tan(K_x a/2 + \varphi_x) = \frac{n_1^2}{n_3^2} \frac{\gamma_3}{K_x} \quad (5.4-6)$$

● 对于界面 $x = -a/2$, 有

$$\left. \begin{aligned} H_{y1} \cos(K_x a/2 - \varphi_x) &= H_{y5} \\ \frac{1}{n_1^2} K_x H_{y1} \sin(K_x a/2 - \varphi_x) &= \frac{\gamma_5}{n_5^2} H_{y5} \end{aligned} \right\}$$

得
$$\tan(K_x a/2 - \varphi_x) = \frac{n_1^2}{n_5^2} \frac{\gamma_5}{K_x} \quad (5.4-7)$$

由式 (5.4-6) 和式 (5.4-7), 可得

$$K_x a = m\pi + \arctan\left(\frac{n_1^2}{n_3^2} \frac{\gamma_3}{K_x}\right) + \arctan\left(\frac{n_1^2}{n_5^2} \frac{\gamma_5}{K_x}\right) \quad (5.4-8)$$

根据前面的定义, γ_3 、 γ_5 只与 K_x 有关, 所以, 此式是关于 K_x 的方程, 其中 $m=0,1,2,3,\dots$ 从中也可得出相位因子 φ_x

$$2\varphi_x = \arctan\left(\frac{n_1^2}{n_3^2} \frac{\gamma_3}{K_x}\right) - \arctan\left(\frac{n_1^2}{n_5^2} \frac{\gamma_5}{K_x}\right) + \begin{cases} 0 & (m \text{ 为偶数}) \\ \pi & (m \text{ 为奇数}) \end{cases} \quad (5.4-9)$$

同理, 在界面 $y = \pm b/2$ 上, H_y 、 H_z 连续, 由式 (5.4-2) 可知, $\frac{\partial}{\partial y} H_y$ 也连续, 有

$$\left. \begin{aligned} H_{y1} \cos(K_y b/2 + \varphi_y) &= H_{y2} \\ K_y H_{y1} \sin(K_y b/2 + \varphi_y) &= \gamma_2 H_{y2} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} H_{y1} \cos(K_y b/2 - \varphi_y) &= H_{y4} \\ K_y H_{y1} \sin(K_y b/2 - \varphi_y) &= \gamma_4 H_{y4} \end{aligned} \right\}$$

得
$$\tan(K_y b/2 + \varphi_y) = \gamma_2 / K_y \quad (5.4-10)$$

$$\tan(K_y b/2 - \varphi_y) = \gamma_4 / K_y \quad (5.4-11)$$

由此可得

$$K_y b = n\pi + \arctan(\gamma_2 / K_y) + \arctan(\gamma_4 / K_y) \quad (5.4-12)$$

因为 γ_2 、 γ_4 只与 K_y 有关, 此式是关于 K_y 的方程, 同样 $n=0,1,2,3,\dots$ 从中可得出相位因子 φ_y

$$2\varphi_y = \arctan(\gamma_2 / K_y) - \arctan(\gamma_4 / K_y) + \begin{cases} 0 & (n \text{ 为偶数}) \\ \pi & (n \text{ 为奇数}) \end{cases} \quad (5.4-13)$$

利用三角函数公式 $\arctan \alpha + \arctan \frac{1}{\alpha} = \frac{\pi}{2}$, 将式 (5.4-8) 和式 (5.4-12) 改写, 得到 E_{mn}^x 模的

特征方程

$$\begin{cases} K_x a = m\pi - \arctan\left(\frac{n_3^2 K_x}{n_1^2 \gamma_3}\right) - \arctan\left(\frac{n_5^2 K_x}{n_1^2 \gamma_5}\right) \\ K_y b = n\pi - \arctan\left(\frac{K_y}{\gamma_2}\right) - \arctan\left(\frac{K_y}{\gamma_4}\right) \end{cases} \quad (5.4-14)$$

这样调整之后，模序数 m 、 n 取正整数 $1, 2, 3, \dots$ ， m 、 n 代表在 x 、 y 方向模场分布的极大值数目，最低阶模为 E_{11}^x 模，称为波导的主模或基模^①。可见，对三维波导，须分别求解关于 K_x 和 K_y 的两个联立方程，才能得到传播常数 β ，并进一步得到模场分布。

5.5 E_{mn}^y 模特征方程

该模式电磁场的主要分量是 E_y 、 H_x ，纵向分量 E_z 、 H_z 比较小，另外两个横向分量 E_x 、 H_y 更小，因此，可以认为 $E_x=0$ 或者 $H_y=0$ 。这里设定 $H_y=0$ ，取 H_x 作为计算分量，那么其他分量均能用 H_x 表示。利用式 (5.3-3) 和式 (5.3-4) 及 $\nabla \cdot \vec{H} = 0$ ，可得

$$H_y = 0 \quad (5.5-1)$$

$$H_z = -\frac{i}{\beta} \frac{\partial}{\partial x} H_x \quad (5.5-2)$$

$$E_x = -\frac{1}{\omega \epsilon_0 n^2 \beta} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} H_x \quad (5.5-3)$$

$$E_y = -\frac{1}{\omega \epsilon_0 n^2 \beta} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + n^2 K_0^2 \right) H_x \quad (5.5-4)$$

$$E_z = \frac{i}{\omega \epsilon_0 n^2} \frac{\partial}{\partial y} H_x \quad (5.5-5)$$

在界面 $x = \pm a/2$ 上， H_x 、 H_z 连续，由式 (5.5-2) 可知， $\frac{\partial}{\partial x} H_x$ 也连续，有

$$\begin{cases} H_{x1} \cos(K_x a/2 + \varphi_x) = H_{x3} \\ K_x H_{x1} \sin(K_x a/2 + \varphi_x) = \gamma_3 H_{x3} \end{cases} \quad \begin{cases} H_{x1} \cos(K_x a/2 - \varphi_x) = H_{x5} \\ K_x H_{x1} \sin(K_x a/2 - \varphi_x) = \gamma_5 H_{x5} \end{cases}$$

分别简化，整理得

$$\tan(K_x a/2 + \varphi_x) = \gamma_3 / K_x \quad (5.5-6)$$

$$\tan(K_x a/2 - \varphi_x) = \gamma_5 / K_x \quad (5.5-7)$$

消去 φ_x ，得

$$K_x a = m\pi + \arctan(\gamma_3 / K_x) + \arctan(\gamma_5 / K_x) \quad (5.5-8)$$

其中 $m=0, 1, 2, 3, \dots$ 相位因子 φ_x 为

$$2\varphi_x = \arctan(\gamma_3 / K_x) - \arctan(\gamma_5 / K_x) + \begin{cases} 0 & (m \text{ 为偶数}) \\ \pi & (m \text{ 为奇数}) \end{cases} \quad (5.5-9)$$

在界面 $y = \pm b/2$ 上， H_x 、 E_z 连续，由式 (5.5-5) 可知， $\frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial y} H_x$ 也连续，有

① 在有些书籍和文献中，特征方程采用式 (5.4-8) 和式 (5.4-12) 的形式，模序数 m 和 n 从零开始取值，主模用 E_{00}^x 和 E_{00}^y 表示。

$$\left. \begin{aligned} H_{x1} \cos(K_y b/2 + \varphi_y) &= H_{x2} \\ \frac{1}{n_1^2} K_y H_{x1} \sin(K_y b/2 + \varphi_y) &= \frac{1}{n_2^2} \gamma_2 H_{x2} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} H_{x1} \cos(K_y b/2 - \varphi_y) &= H_{x4} \\ \frac{1}{n_1^2} K_y H_{x1} \sin(K_y b/2 - \varphi_y) &= \frac{1}{n_4^2} \gamma_4 H_{x4} \end{aligned} \right\}$$

分别整理, 得

$$\tan(K_y b/2 + \varphi_y) = \frac{n_1^2}{n_2^2} \frac{\gamma_2}{K_y} \quad (5.5-10)$$

$$\tan(K_y b/2 - \varphi_y) = \frac{n_1^2}{n_4^2} \frac{\gamma_4}{K_y} \quad (5.5-11)$$

消去 φ_y , 得

$$K_y b = n\pi + \arctan\left(\frac{n_1^2}{n_2^2} \frac{\gamma_2}{K_y}\right) + \arctan\left(\frac{n_1^2}{n_4^2} \frac{\gamma_4}{K_y}\right) \quad (5.5-12)$$

其中 $n=0,1,2,3,\dots$ 相位因子 φ_y 为

$$2\varphi_y = \arctan\left(\frac{n_1^2}{n_2^2} \frac{\gamma_2}{K_y}\right) - \arctan\left(\frac{n_1^2}{n_4^2} \frac{\gamma_4}{K_y}\right) + \begin{cases} 0 & (n \text{ 为偶数}) \\ \pi & (n \text{ 为奇数}) \end{cases} \quad (5.5-13)$$

利用 $\arctan \alpha + \arctan \frac{1}{\alpha} = \frac{\pi}{2}$, 将式 (5.5-8) 和式 (5.5-12) 改写为

$$\begin{cases} K_x a = m\pi - \arctan\left(\frac{K_x}{\gamma_3}\right) - \arctan\left(\frac{K_x}{\gamma_5}\right) \\ K_y b = n\pi - \arctan\left(\frac{n_1^2}{n_2^2} \frac{K_y}{\gamma_2}\right) - \arctan\left(\frac{n_1^2}{n_4^2} \frac{K_y}{\gamma_4}\right) \end{cases} \quad (5.5-14)$$

这就是 E_{mn}^y 模的特征方程, 此时 $m, n=1,2,3,\dots$ 主模为 E_{11}^y 模。

5.6 模式特性

5.6.1 导模条件与模截止

根据式 (5.3-14) ~ 式 (5.3-17), 衰减常数 γ_i ($i=2,3,4,5$) 任一个为零, 即表示模截止, 倏逝波变为辐射波, 导模变为辐射模。区域 II 和 IV 内的衰减常数分别为

$$\gamma_2^2 = (n_1^2 - n_2^2)K_0^2 - K_y^2$$

$$\gamma_4^2 = (n_1^2 - n_4^2)K_0^2 - K_y^2$$

设 $n_2 \geq n_4$, 显然, 导模的 K_y 一定满足

$$K_y < K_0 \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \quad (5.6-1)$$

区域 III 和 V 内的衰减常数分别为

$$\gamma_3^2 = (n_1^2 - n_3^2)K_0^2 - K_x^2$$

$$\gamma_5^2 = (n_1^2 - n_5^2)K_0^2 - K_x^2$$

设 $n_3 \geq n_5$, 导模的 K_x 应满足

$$K_x < K_0 \sqrt{n_1^2 - n_3^2} \quad (5.6-2)$$

所以 K_x 和 K_y 存在着截止上限，分别为

$$K_{xc} = K_0 \sqrt{n_1^2 - n_3^2} \quad (5.6-3)$$

$$K_{yc} = K_0 \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \quad (5.6-4)$$

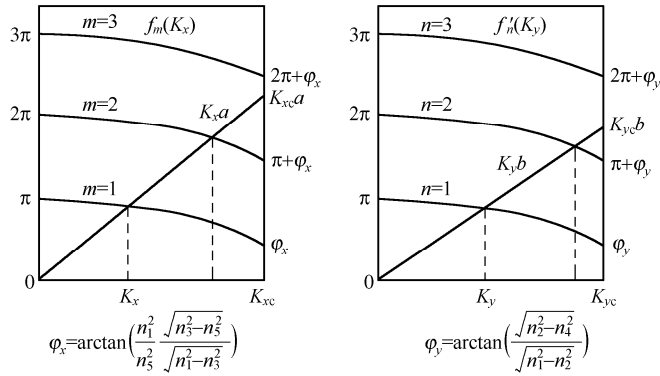


图 5.5 E_{mn}^x 模特征方程求解示意图

K_x 和 K_y 中只要有一个达到截止限，不论另一个多大，都是辐射模式。设 n_2 是 n_2 、 n_3 、 n_4 、 n_5 中折射率最大的，因为 $\beta^2 = n_1^2 K_0^2 - K_x^2 - K_y^2$ ，所以导模传播常数仍然满足 $n_2 K_0 < \beta < n_1 K_0$ 。

虽然 E_{mn}^x 模和 E_{mn}^y 模的特征方程式 (5.4-14) 和式 (5.5-14)，不能用一般代数方程求解，只能得到数值解，但我们可以很容易地确定方程有导模解的条件。以 E_{mn}^x 模为例，仿照 4.5 节的分析方法，方程式 (5.4-14) 可写为 $K_x a = f_m(K_x)$ ， $K_y b = f'_n(K_y)$ ，方程的等号左侧都是单调递增的直线，右侧都是单调下降的曲线族，如图 5.5 所示。如果直线和曲线族在导模域 $K_x \in (0, K_{xc})$ 、 $K_y \in (0, K_{yc})$ 内存在交点，说明特征方程有导模解，因此导模 E_{mn}^x 存在的条件是

$$K_{xc} a > (m-1)\pi + \arctan\left(\frac{n_1^2 \sqrt{n_3^2 - n_5^2}}{n_5^2 \sqrt{n_1^2 - n_3^2}}\right) \quad (5.6-5)$$

$$K_{yc} b > (n-1)\pi + \arctan\left(\frac{\sqrt{n_2^2 - n_4^2}}{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}\right) \quad (5.6-6)$$

令
$$\delta_x = \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{n_1^2 \sqrt{n_3^2 - n_5^2}}{n_5^2 \sqrt{n_1^2 - n_3^2}}\right) \quad (5.6-7)$$

$$\delta_y = \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{\sqrt{n_2^2 - n_4^2}}{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}\right) \quad (5.6-8)$$

δ_x 、 δ_y 均小于 1/2。将式 (5.6-5) 和式 (5.6-6) 简写为

$$m < \frac{2a}{\lambda} \sqrt{n_1^2 - n_3^2} + 1 - \delta_x \quad (5.6-9)$$

$$n < \frac{2b}{\lambda} \sqrt{n_1^2 - n_2^2} + 1 - \delta_y \quad (5.6-10)$$

即模序数 m 、 n 满足上面两式的 E_{mn}^x 模都是导模，否则为截止模。对给定的波导结构和光波

长, m 、 n 均有上限。从图 5.5 可以看出, 如果某阶模截止, 则其以上的高阶模亦全部截止, 而主模最不易截止。

对 E_{mn}^y 模, 导模存在的条件仍是式 (5.6-9) 和式 (5.6-10), 只是其中的 δ_x 、 δ_y 用下式表示

$$\delta_x = \frac{1}{\pi} \arctan \left(\frac{\sqrt{n_3^2 - n_5^2}}{\sqrt{n_1^2 - n_3^2}} \right) \quad (5.6-11)$$

$$\delta_y = \frac{1}{\pi} \arctan \left(\frac{n_1^2 \sqrt{n_2^2 - n_4^2}}{n_4^2 \sqrt{n_1^2 - n_2^2}} \right) \quad (5.6-12)$$

5.6.2 单模传输

模序数 m 和 n 有截止上限, m 、 n 同时都小于各自的截止限时为导模, m 、 n 中任一高于截止限则模截止。可见, 对 E^x 模, 单模传输一定只有主模 E_{11}^x 导通, 其余模都截止, 所以单模传输需满足如下条件

$$\begin{cases} 1 < \frac{2a}{\lambda} \sqrt{n_1^2 - n_3^2} + 1 - \delta_x < 2 \\ 1 < \frac{2b}{\lambda} \sqrt{n_1^2 - n_2^2} + 1 - \delta_y < 2 \end{cases} \quad (5.6-13)$$

当波导具有对称性, 即 $n_2 = n_4$, $n_3 = n_5$ 时, 有 $\delta_x = 0$, $\delta_y = 0$, 则 E^x 模的单模条件为

$$\begin{cases} \lambda > 2a \sqrt{n_1^2 - n_3^2} \\ \lambda > 2b \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \end{cases} \quad (5.6-14)$$

对 E^y 模, 单模传输 (只有主模 E_{11}^y) 也有如上的条件。因此, 对确定的光波长, 若需要单模传输, 可以根据上式进行波导设计, 如折射率分布已知, 那么波导的截面尺寸将受到限制, 存在最大宽度和最大厚度。对埋入式条形波导, 当 $a=b$ 时, 由特征方程可知, E_{mn}^x 模和 E_{mn}^y 模的传播常数完全相同, 这种情况称 E_{mn}^x 模和 E_{mn}^y 模简并。此时, 经单模波导设计, 实现的其实是双主模传输。对非对称波导, 当满足弱导条件时, E_{mn}^x 模和 E_{mn}^y 模的传播常数很接近, 可认为是近似简并的, 单模条件下也是双主模传输。

5.6.3 截止波长

根据导模条件式 (5.6-9) 及式 (5.6-10), 也可以得出, 对确定的波导结构, 如 E_{mn}^x 或 E_{mn}^y 为导模, 光波长应满足

$$\begin{cases} \lambda < \frac{2a \sqrt{n_1^2 - n_3^2}}{m-1+\delta_x} = \lambda_{mc} \\ \lambda < \frac{2b \sqrt{n_1^2 - n_2^2}}{n-1+\delta_y} = \lambda_{nc} \end{cases} \quad (5.6-15)$$

其中 δ_x 和 δ_y 对两种模式的表示式不同, 所以, 波长存在截止上限 $\lambda_{mn,c}$ (λ_{mc} 和 λ_{nc} 中较小者), 当 $\lambda \geq \lambda_{mn,c}$ 时, 对该波长的光, E_{mn}^x 或 E_{mn}^y 模截止。不同阶次的导模截止波长不同, 高阶模的截止波长小, 主模的截止波长最大, 当 $n_2 = n_4$, $n_3 = n_5$ 时, $\lambda_{1,c} = \infty$, 即对称波导的主模永不截止。

5.6.4 矩形波导色散曲线与模场分布

这里以埋入式条形波导为例，分析各导模的传播常数及其依赖关系。设波导宽度为 a ，厚度为 b ， $n_1 > n_2 = n_3 = n_4 = n_5$ ，为便于更一般性的分析，仍依照式 (4.5-25) 和式 (4.5-26) 定义归一化传播常数 B 及归一化频率 V

$$B = \frac{\bar{\beta}^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2} \quad (5.6-16)$$

$$V = \frac{2\pi b}{\lambda} \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \quad (5.6-17)$$

考虑弱导情形， $\Delta = \frac{n_1 - n_2}{n_1} \ll 1$ ，图 5.6

为 $a=b$ 时的归一化色散曲线。从图中可见有许多模式完全简并或近似简并，如： E_{11}^x 、 E_{11}^y ； E_{12}^x 、 E_{21}^y ， E_{21}^x 、 E_{12}^y ； E_{22}^x 、 E_{22}^y ； E_{13}^x 、 E_{31}^y ， E_{31}^x 、 E_{13}^y ； E_{23}^x 、 E_{32}^y 、 E_{32}^x 、 E_{23}^y ； E_{14}^x 、 E_{41}^y ， E_{41}^x 、 E_{14}^y 。

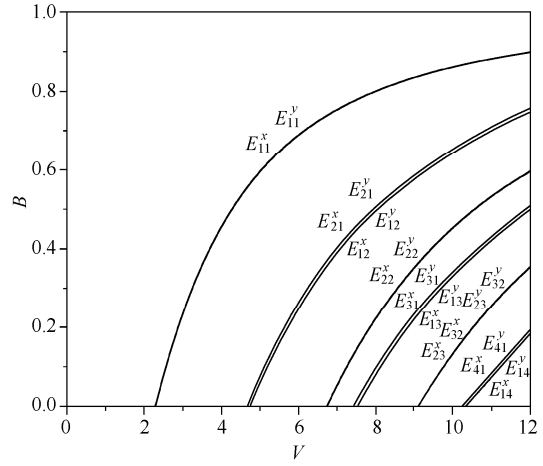


图 5.6 矩形波导导模的归一化色散曲线 ($\Delta \ll 1$, $a=b$)

$a=2b$ 时的色散曲线如图 5.7 所示，这时一些简并被消除，如 E_{21}^x 、 E_{21}^y 与 E_{12}^x 、 E_{12}^y ， E_{31}^x 、 E_{31}^y 与 E_{13}^x 、 E_{13}^y ， E_{41}^x 、 E_{41}^y 与 E_{14}^x 、 E_{14}^y 等的传播常数曲线已分开。若适当增大波导的相对折射率差 Δ 或改变波导为非对称波导，则可进一步将 E_{mn}^x 模与 E_{mn}^y 模的简并消除。图 5.8 是 $\Delta=0.2$ ， $a=2b$ 时的色散曲线， E_{mn}^x 模与 E_{mn}^y 模的简并已消除。由于远离截止时，大部分功率集中在芯区，Marcatili 近似结果较好，与更精确的数值方法的结果接近，但在近截止区，与精确的数值结果之间存在一定误差。这从图 5.6 至图 5.8 也可看出，对称波导的主模的归一化截止频率不为零，说明当 $V = \frac{2\pi b}{\lambda} \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$ 小于某个数值时，主模将截止；但根据上节的分析，对称波导的主模是不截止的，可见在近截止区，Marcatili 方法有局限性。

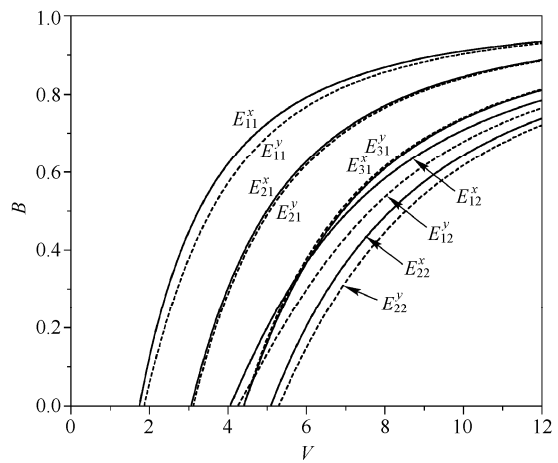
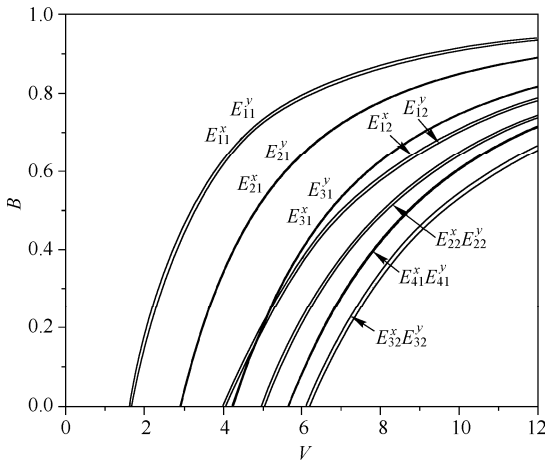


图 5.7 矩形波导导模的归一化色散曲线 ($\Delta \ll 1$, $a=2b$) 图 5.8 矩形波导导模的归一化色散曲线 ($\Delta=0.2$, $a=2b$)

根据马卡提里近似，矩形波导内场分布函数如图 5.4 各区中所列，场分布与模式有关，其中 K_x 和 K_y 由相应的 E_{mn}^x 模或 E_{mn}^y 模的特征方程决定，各边区的衰减常数 $\gamma_2 \sim \gamma_5$ 则由

式(5.3-14)~式(5.3-17)得到。为便于说明,将场分布函数重新整理如下

$$u(x, y) = \begin{cases} u_1 \cos(K_x x + \varphi_x) \cos(K_y y + \varphi_y) & (-a/2 \leq x \leq a/2, -b/2 \leq y \leq b/2) \\ u_2 \cos(K_x x + \varphi_x) e^{-\gamma_2(y-b/2)} & (-a/2 \leq x \leq a/2, y \geq b/2) \\ u_3 e^{-\gamma_3(x-a/2)} \cos(K_y y + \varphi_y) & (x \geq a/2, -b/2 \leq y \leq b/2) \\ u_4 \cos(K_x x + \varphi_x) e^{\gamma_4(y+b/2)} & (-a/2 \leq x \leq a/2, y \leq -b/2) \\ u_5 e^{\gamma_5(x+a/2)} \cos(K_y y + \varphi_y) & (x \leq -a/2, -b/2 \leq y \leq b/2) \end{cases} \quad (5.6-18)$$

对于 E_{mn}^x 模, $u(x, y) = H_y(x, y)$; 对于 E_{mn}^y 模, $u(x, y) = H_x(x, y)$ 。根据边界条件, 各边区的场幅系数均可用 u_1 表示, 分别为

$$u_2 = u_1 \cos(K_y b/2 + \varphi_y) \quad (5.6-19a)$$

$$u_3 = u_1 \cos(K_x a/2 + \varphi_x) \quad (5.6-19b)$$

$$u_4 = u_1 \cos(K_y b/2 - \varphi_y) \quad (5.6-19c)$$

$$u_5 = u_1 \cos(K_x a/2 - \varphi_x) \quad (5.6-19d)$$

图 5.9 所示为矩形波导几个低阶导模场的场幅在 x 方向和 y 方向的变化以及波导截面上的强度分布情况。

为简单清晰, 还可以将 E_{mn}^x 模和 E_{mn}^y 模的场画成如图 5.10 所示的场型图, 图中实线代表电场, 虚线代表磁场, 线的长短代表场的强弱。对称波导的场呈对称分布, 当折射率非对称时, $n_2 \neq n_4$, $n_3 \neq n_5$, 则 φ_x 和 φ_y 都不等于零, 场的极大值位置偏向折射率较大的一侧。

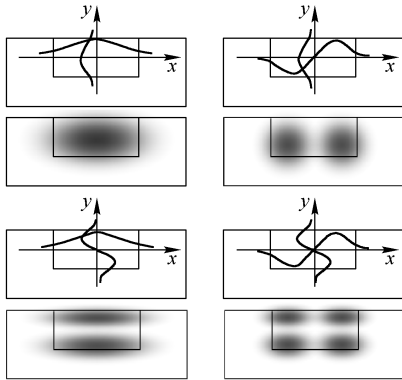


图 5.9 矩形波导的模场场幅及光强分布示意图

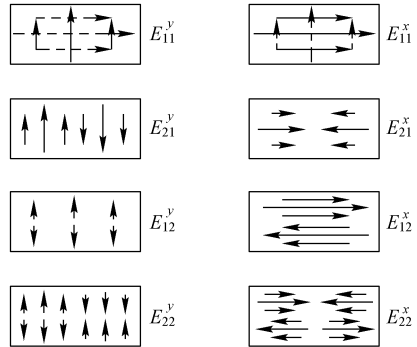


图 5.10 矩形波导各种模式的场型图

5.7 有效折射率法

有效折射率法也只适用于远离截止模式, 但它是比 Marcatili 近似更为精确的一种近似方法, 它是把厚度方向的限制效应与宽度方向的限制效应分解开, 转换成等价的平板波导来处理的方法, 在集成光学中应用较广。图 5.1 中所示的几种类型波导均可用有效折射率法进行分析。特别是在波导的宽度比厚度大、在宽度方向上折射率缓慢变化的波导结构内, 能够高精度地进行分析。大多数半导体激光器所用的波导都是这样的波导, 所以有效折射率法是一种既方便又有效的分析方法。

5.7.1 矩形波导

矩形波导结构及参数仍如图 5.2 所示。前面已介绍, Marcatili 近似可等效成两互相垂直、

彼此独立的平板波导的组合。有效折射率法也是通过平板波导变换而得到的，但互相垂直的两个平板波导间是相关联的，见图 5.11。先求解芯层折射率为 n_1 的一个平板光波导的特征方程，再用得到的该平板波导的有效折射率，作为第二个平板光波导的芯层折射率，进一步求解第二个平板波导的特征方程，由此确定的传播常数即是矩形波导的传播常数。

如图 5.11 所示，以 x 方向平板波导作为首先求解的波导。对 E_{mn}^x 模，其主要电磁场分量是 E_x 和 H_y ，在 x 方向波导(图(a))中相当于 TM 偏振，所以其特征方程为

$$K_x a = m\pi - \arctan\left(\frac{n_3^2 K_x}{n_1^2 \gamma_3}\right) - \arctan\left(\frac{n_5^2 K_x}{n_1^2 \gamma_5}\right) \quad (5.7-1)$$

式中， γ_3 、 γ_5 与式(5.3-15)、式(5.3-17)相同。有效折射率为

$$N_1 = \sqrt{n_1^2 - K_x^2 / K_0^2} \quad (5.7-2)$$

E_{mn}^x 模在芯层折射率为 N_1 的 y 方向波导(图(b))中相当于 TE 偏振，其特征方程为

$$K_y b = n\pi - \arctan(K_y / \gamma'_2) - \arctan(K_y / \gamma'_4) \quad (5.7-3)$$

$$\text{式中} \quad \gamma'_2 = \sqrt{(N_1^2 - n_2^2)K_0^2 - K_y^2} \quad (5.7-4)$$

$$\gamma'_4 = \sqrt{(N_1^2 - n_4^2)K_0^2 - K_y^2} \quad (5.7-5)$$

所以矩形波导 E_{mn}^x 模的传播常数为

$$\beta = \sqrt{N_1^2 K_0^2 - K_y^2} = \sqrt{n_1^2 K_0^2 - K_x^2 - K_y^2} \quad (5.7-6)$$

对 E_{mn}^y 模，其主要电磁场分量是 E_y 和 H_x ，在 x 方向波导(图(a))中相当于 TE 偏振，而在 y 方向波导(图(b))中相当于 TM 偏振，根据有效折射率法，其特征方程如下

$$K_x a = m\pi - \arctan(K_x / \gamma_3) - \arctan(K_x / \gamma_5) \quad (5.7-7)$$

$$K_y b = n\pi - \arctan\left(\frac{n_2^2 K_y}{N_1^2 \gamma'_2}\right) - \arctan\left(\frac{n_4^2 K_y}{N_1^2 \gamma'_4}\right) \quad (5.7-8)$$

求解方程，可得 E_{mn}^y 模的传播常数。

有效折射率法除在近截止区域存在一定的误差外，还有一个缺点，就是计算顺序不同会导致计算结果的不一致，即当以 y 方向平板波导作为首先求解的波导并获得有效折射率 N_1 后，再求解芯层折射率为 N_1 的 x 方向平板波导，得到的传播常数与前面相反顺序计算的值不相同。

比较由有效折射率法和马卡提里近似法得到的特征方程，可知，由于 $N_1 < n_1$ ，一定有 $\beta_{\text{eff}} > \beta_{\text{marcatili}}$ ，而以有效折射率法的结果精确度较高。二者在近截止区域差别比较明显，在远离截止区域，符合得很好，均能得到相当精确的结果。

5.7.2 脊波导

脊波导的横截面如图 5.12(a)所示， n_1 、 n_2 、 n_3 分别是芯层、衬底、覆盖层的折射率，芯层厚度为 d ，脊高为 h ，脊宽为 a 。脊形光波导的有效折射率法稍微复杂一些，因为芯区两边的折射率沿芯层高度的方向并不是常数。所以，第一步求解 y 方向二维波导时，不仅需要得到芯层厚度为 d 、折射率为 n_1 的平板波导的有效折射率 N_1 ，还要得到两侧的芯层厚度为 $d-h$ 、折射率为 n_1 的平板波导的有效折射率 N_2 ，见图 5.12(b)。由于 $d > d-h$ ，那么一定有 $N_1 > N_2$ ，这样，第二步继续求解图 5.12(c)所示等效的 x 方向平板波导(对称波导)，即可最终给出脊波导的传播常数 β 或有效折射率 N 。

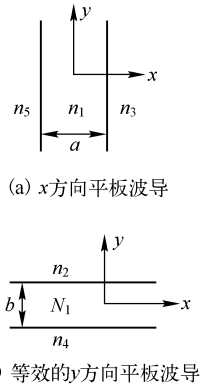


图 5.11 有效折射率法

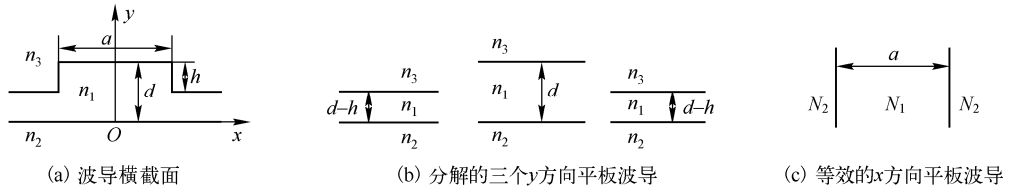


图 5.12 脊波导结构示意图及其等效平板波导变换

考虑 E_{mn}^x 模，对 y 方向平板波导属 TE 偏振，对 x 方向平板波导属 TM 偏振，因此可依次给出下列三个特征方程

$$K_y d = n\pi - \arctan(K_y / \gamma_2) - \arctan(K_y / \gamma_3) \quad (5.7-9a)$$

其中， $K_y = K_0 \sqrt{n_1^2 - N_1^2}$ ， $\gamma_{2,3} = \sqrt{(n_1^2 - n_{2,3}^2)K_0^2 - K_y^2} = K_0 \sqrt{N_1^2 - n_{2,3}^2}$ ， $n=1,2,3,\dots$

$$K'_y (d-h) = n\pi - \arctan(K'_y / \gamma'_2) - \arctan(K'_y / \gamma'_3) \quad (5.7-9b)$$

此处， $K'_y = K_0 \sqrt{n_1^2 - N_2^2}$ ， $\gamma'_{2,3} = \sqrt{(n_1^2 - n_{2,3}^2)K_0^2 - K_y'^2} = K_0 \sqrt{N_2^2 - n_{2,3}^2}$ ，以及

$$K_x a = m\pi - 2 \arctan \left(\frac{N_2^2 K_x}{N_1^2 \gamma_2''} \right) \quad (5.7-9c)$$

式中， $K_x = K_0 \sqrt{N_1^2 - N^2}$ ， $\gamma_2'' = \sqrt{(N_1^2 - N_2^2)K_0^2 - K_x^2} = K_0 \sqrt{N^2 - N_2^2}$ ， $m=1,2,3,\dots$

联立上述三个特征方程求解，即可获得脊波导 E_{mn}^x 模的有效折射率 N 。

类似地，可以很容易得到脊波导 E_{mn}^y 模的等效平板波导的特征方程为

$$K_0 \sqrt{N_1^2 - N^2} a = m\pi - 2 \arctan \left(\frac{\sqrt{N_1^2 - N^2}}{\sqrt{N^2 - N_2^2}} \right) \quad (5.7-10)$$

其中， N 为 E_{mn}^y 模的有效折射率， N_1 、 N_2 分别由如下两方程确定

$$K_0 \sqrt{n_1^2 - N_1^2} d = n\pi - \arctan \left(\frac{n_2^2 \sqrt{n_1^2 - N_1^2}}{n_1^2 \sqrt{N_1^2 - n_2^2}} \right) - \arctan \left(\frac{n_3^2 \sqrt{n_1^2 - N_1^2}}{n_1^2 \sqrt{N_1^2 - n_3^2}} \right) \quad (5.7-11a)$$

$$K_0 \sqrt{n_1^2 - N_2^2} (d-h) = n\pi - \arctan \left(\frac{n_2^2 \sqrt{n_1^2 - N_2^2}}{n_1^2 \sqrt{N_2^2 - n_2^2}} \right) - \arctan \left(\frac{n_3^2 \sqrt{n_1^2 - N_2^2}}{n_1^2 \sqrt{N_2^2 - n_3^2}} \right) \quad (5.7-11b)$$

式中， $m, n=1,2,3,\dots$

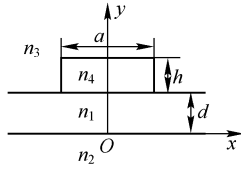
5.7.3 条载波导及四层平板波导

如图 5.13(a)所示的条载波导，芯层厚度为 d ，载条高为 h ，宽为 a 。芯层、衬底、覆盖层的折射率分别是 n_1 、 n_2 、 n_3 ，仍假设 $n_1 > n_2 \geq n_3$ 。加载条折射率为 n_4 ，且需满足 $n_4 > n_3$ ，但 n_4 可以大于 n_1 ，也可以小于 n_1 。做等效平板分析时与前面类似，如图 5.13(b)所示，载条区两侧对应厚度为 d 的 y 方向的三层平板波导，其有效折射率设为 N_2 ，而含载条区域对应的是一个四层的平板波导，有效折射率设为 N_1 。

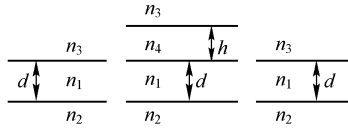
仍以 E_{mn}^x 模为例，对 y 方向三层平板波导，该模为 TE 偏振，有

$$K'_y d = n\pi - \arctan(K'_y / \gamma'_2) - \arctan(K'_y / \gamma'_3) \quad (5.7-12)$$

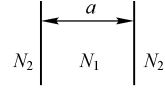
其中， $K'_y = K_0 \sqrt{n_1^2 - N_2^2}$ ， $\gamma'_{2,3} = \sqrt{(n_1^2 - n_{2,3}^2)K_0^2 - K_y'^2} = K_0 \sqrt{N_2^2 - n_{2,3}^2}$ ， $n=1,2,3,\dots$ 由此确定有效折射率 N_2 。



(a) 波导截面



(b) 分解的三个y方向平板波导



(c) 分解的x方向平板波导

图 5.13 条载波导及其等效平板波导变换

对于图 5.13 (b) 中的四层平板波导，仍可采用各区域场方程的形式解，再通过交界面上的场匹配关系，确定特征方程。这里讨论 $n_1 > n_4 > n_2 \geq n_3$ 的情况，那么四层平板波导导模的传播常数 β 可能为 $n_4 K_0 < \beta < n_1 K_0$ ，这时电磁场在 n_1 介质层内呈振荡形式，其他层内是衰减形式。 β 也可能为 $n_2 K_0 < \beta < n_4 K_0$ ，则电磁场在 n_1 和 n_4 两介质层内均呈振荡形式，而在衬底和覆盖层内呈指数衰减。

这里设 $n_2 K_0 < \beta < n_4 K_0$ ，按图 5.13 中所示的坐标系，分析 TE 偏振模式。各区 E_x 分量场方程为

$$\frac{d^2}{dy^2} E_x - p_3^2 E_x = 0 \quad (d+h < y < \infty) \quad (5.7-13)$$

$$\frac{d^2}{dy^2} E_x + \kappa_4^2 E_x = 0 \quad (d < y < d+h) \quad (5.7-14)$$

$$\frac{d^2}{dy^2} E_x + \kappa_1^2 E_x = 0 \quad (0 < y < d) \quad (5.7-15)$$

$$\frac{d^2}{dy^2} E_x - p_2^2 E_x = 0 \quad (-\infty < y < 0) \quad (5.7-16)$$

其中各参数的定义如下

$$\kappa_1 = K_0 \sqrt{n_1^2 - N^2} \quad (5.7-17)$$

$$\kappa_4 = K_0 \sqrt{n_4^2 - N^2} \quad (5.7-18)$$

$$p_2 = K_0 \sqrt{N^2 - n_2^2} \quad (5.7-19)$$

$$p_3 = K_0 \sqrt{N^2 - n_3^2} \quad (5.7-20)$$

则方程具有如下形式的通解

$$E_x = \begin{cases} A_3 e^{-p_3(y-d-h)} & (y > d+h) \\ A_4 \cos(\kappa_4 y + \phi_4) & (d < y < d+h) \\ A_1 \cos(\kappa_1 y + \phi_1) & (0 < y < d) \\ A_2 e^{p_2 y} & (y < 0) \end{cases} \quad (5.7-21)$$

利用各边界上 E_x 、 H_z (dE_x/dy) 连续，不难得到

$$\kappa_4 h = n' \pi + \arctan \frac{p_3}{\kappa_4} - \arctan \left[\frac{\kappa_1}{\kappa_4} \tan \left(\kappa_1 d - \arctan \frac{p_2}{\kappa_1} \right) \right] \quad (5.7-22)$$

其中 $n' = 0, 1, 2, \dots$ 为使方程表达式更清晰，令

$$\phi_1 = \arctan \left[\frac{\kappa_1}{\kappa_4} \tan \left(\kappa_1 d - \arctan \frac{p_2}{\kappa_1} \right) \right] \quad (5.7-23)$$

则有

$$\arctan \left(\frac{\kappa_4}{\kappa_1} \tan \phi_1 \right) = n'' \pi + \left(\kappa_1 d - \arctan \frac{p_2}{\kappa_1} \right) \quad (5.7-24)$$

其中 $n''=0,1,2,\dots$ 令

$$\phi_2 = \phi_1 - \arctan\left(\frac{\kappa_4}{\kappa_1} \tan \phi_1\right) \quad (5.7-25)$$

那么, 式(5.7-22)可化为与三层平板波导非常类似的四层平板波导的 TE 模的特征方程

$$\kappa_1 d + \kappa_4 h + \phi_2 = n\pi - \arctan \frac{\kappa_4}{p_3} - \arctan \frac{\kappa_1}{p_2} \quad (n=1,2,3,\dots) \quad (5.7-26)$$

由此可确定四层平板波导的有效折射率 N_1 。

由图 5.13(c), E_{mn}^x 模对 x 方向平板波导为 TM 偏振, 可得特征方程

$$K_x a = m\pi - 2 \arctan\left(\frac{N_2^2}{N_1^2} \frac{K_x}{\gamma_2''}\right) \quad (5.7-27)$$

式中, $K_x = K_0 \sqrt{N_1^2 - N_2^2}$, $\gamma_2'' = K_0 \sqrt{N_2^2 - N_2^2}$, $m=1,2,3,\dots N$ 即为条载波导的有效折射率。

关于分析条载波导有效折射率的解析法, 也可以不用四层平板波导。设 $n_1 > n_4$, 前面获得芯区两侧部分的有效折射率 N_2 之后, 利用 Marcatili 方法, 按图 5.14 的矩形截面介质波导进行分析, 同样可以得到有效的结果。

上面对于四层平板波导的分析可以推广到任意多层平板波导, 如非对称五层平板波导、对称五层平板波导、对称五层 W 型波导、周期折射率波导等, 据此都可以得出相应的特征方程, 不再赘述。

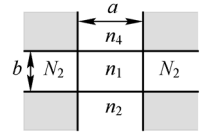


图 5.14 条载波导的等效波导截面图

习题

5-1 基本概念: Marcatili 近似, 弱导近似, E_{mn}^x 模, E_{mn}^y 模, 有效折射率法, 准 TEM 模, 归一化色散曲线。

5-2 查阅书籍和文献介绍分析一般三维光波导的各种近似解析方法及数值方法。

5-3 图 5.2 所示的条形波导中, $n_2 > n_4$, $n_3 = n_5$, 给出它的 E_{12}^x 、 E_{22}^x 、 E_{32}^x 、 E_{12}^y 、 E_{22}^y 模的场分布曲线。

5-4 如图 5.15 所示的嵌入式条形波导中, 芯区、衬底、覆盖层折射率分别为 $n_1=1.7$, $n_2=1.55$, $n_3=1.0$, 波导宽 $3\mu\text{m}$, 高 $1.2\mu\text{m}$ 。(1) 采用 Marcatili 近似法, 给出 E_{mn}^x 模和 E_{mn}^y 模的特征方程;(2) 讨论 K_x 和 K_y 的截止限;(3) 如果传输光波长为 $\lambda=1.5\mu\text{m}$, 列出可能传输的 E_{mn}^y 模系的导模;(4) 对上面折射率分布的嵌入式条形波导, 如果要求 E_{mn}^y 模中只传输 E_{11}^y 模, 则波导的宽和高需满足什么条件?

5-5 如图 5.16 所示的上升式条形波导中, 芯区、衬底、覆盖层的折射率分别为 $n_1=1.60$, $n_2=1.51$, $n_3=1.0$, 波导高 $b=1\mu\text{m}$, 波导宽为 a 。在入射光波长为 $\lambda_1=1.53\mu\text{m}$ 和 $\lambda_2=0.98\mu\text{m}$ 两种情况下, 采用 Marcatili 近似法, 分别画出各导模传播常数随波导宽度 a 的变化曲线(a 取值范围为 $0.8\sim 5\mu\text{m}$)。确定使 $\lambda=1.53\mu\text{m}$ 光波只有 E_{11}^x 模和 E_{11}^y 模传播的波导宽度。

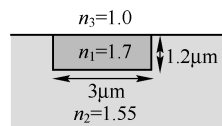


图 5.15 习题 5-4 的图

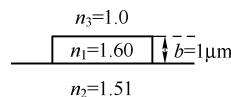


图 5.16 习题 5-5 的图

5-6 采用有效折射率法重做习题 5-5, 并比较两种方法的计算结果。

第 6 章 光纤模式理论

前面已经用几何光学理论分析了光纤中的光传播特性，但几何光学只是电磁波理论的零波长近似，它只适用于分析芯径远大于光波长的多模光纤，而对芯径与光波长在同一量级的光纤，特别是光通信使用的单模光纤，几何光学理论不再适用。精确地分析光纤中场传输问题应是寻求满足边界条件的矢量 Helmholtz 方程的解，以确定各模式场的所有分量及传播常数，这种方法是严格的，称作矢量解法。因为在直角坐标系中，电磁场的各分量都满足标量 Helmholtz 方程，而在柱坐标系中，只有纵向分量 E_z 和 H_z 满足标量 Helmholtz 方程，其他分量都不满足。所以矢量法是从求解 E_z 和 H_z 的标量 Helmholtz 方程出发，再通过两纵向分量求得其余的横向分量。矢量方法虽然解是严格的，但比较复杂。通常对于弱导光纤而言，横向场是主要分量，光波近似为准 TEM 波，这时可继续选取直角坐标系，近似地认为电场和磁场的横向分量均满足标量 Helmholtz 方程，这种方法称作标量解法。本章将用两种方法对阶跃光纤和梯度光纤加以分析。

6.1 光纤的电磁场方程

我们知道，矢量形式的 Helmholtz 方程为

$$\nabla^2 \vec{E} + n^2 K_0^2 \vec{E} = 0 \quad (6.1-1)$$

$$\nabla^2 \vec{H} + n^2 K_0^2 \vec{H} = 0 \quad (6.1-2)$$

在直角坐标系下，电磁场的每个分量均满足如下的标量形式的 Helmholtz 方程

$$\nabla^2 \Psi + n^2 K_0^2 \Psi = 0 \quad (6.1-3)$$

其中， Ψ 代表任一电磁分量，包括 E_x 、 E_y 、 E_z 、 H_x 、 H_y 、 H_z 。

光纤是具有圆柱状结构的介质光波导，光纤中光波的传播具有轴对称性，所以，在研究光纤中光传输特性时，将直角坐标方程转换为柱坐标方程是十分重要和方便的。在图 6.1 所示的柱坐标系中，算符 ∇ 和 ∇^2 具有如下形式

$$\nabla = \vec{r}_0 \frac{\partial}{\partial r} + \vec{\varphi}_0 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \vec{z}_0 \frac{\partial}{\partial z} \quad (6.1-4)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (6.1-5)$$

电场强度和磁场强度需表示成如下三个分量之和的形式

$$\vec{E} = \vec{r}_0 E_r + \vec{\varphi}_0 E_\varphi + \vec{z}_0 E_z \quad (6.1-6)$$

$$\vec{H} = \vec{r}_0 H_r + \vec{\varphi}_0 H_\varphi + \vec{z}_0 H_z \quad (6.1-7)$$

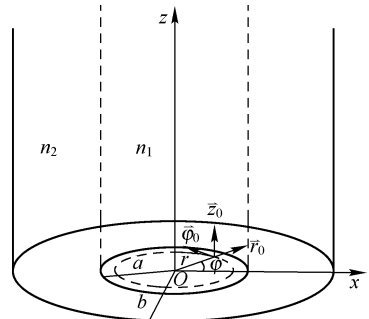


图 6.1 柱坐标系及光纤结构

因此，矢量 Helmholtz 方程式 (6.1-1) 在柱坐标系中表示如下

$$\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] (\vec{r}_0 E_r + \vec{\varphi}_0 E_\varphi + \vec{z}_0 E_z) + n^2 K_0^2 (\vec{r}_0 E_r + \vec{\varphi}_0 E_\varphi + \vec{z}_0 E_z) = 0 \quad (6.1-8)$$

利用 $\partial \vec{r}_0 / \partial \varphi = \vec{\varphi}_0$ ， $\partial \vec{\varphi}_0 / \partial \varphi = -\vec{r}_0$ ，方程第一部分整理后为

$$\begin{aligned}\nabla^2 \vec{E} = & \vec{r}_0 \frac{\partial^2}{\partial r^2} E_r + \vec{\varphi}_0 \frac{\partial^2}{\partial r^2} E_\varphi + \vec{z}_0 \frac{\partial^2}{\partial r^2} E_z + \vec{r}_0 \frac{\partial^2}{\partial z^2} E_r + \vec{\varphi}_0 \frac{\partial^2}{\partial z^2} E_\varphi + \vec{z}_0 \frac{\partial^2}{\partial z^2} E_z + \\ & \frac{1}{r} \left[\vec{r}_0 \frac{\partial}{\partial r} E_r + \vec{\varphi}_0 \frac{\partial}{\partial r} E_\varphi + \vec{z}_0 \frac{\partial}{\partial r} E_z \right] + \frac{1}{r^2} \left[\vec{r}_0 \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} E_r + 2\vec{\varphi}_0 \frac{\partial}{\partial \varphi} E_r - \right. \\ & \left. \vec{r}_0 E_r - 2\vec{r}_0 \frac{\partial}{\partial \varphi} E_\varphi + \vec{\varphi}_0 \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} E_\varphi - \vec{\varphi}_0 E_\varphi + \vec{z}_0 \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} E_z \right] \quad (6.1-9)\end{aligned}$$

正规波导中的电磁场，沿 z 轴传播时，可写作如下形式

$$\vec{E} = \vec{E}(r, \varphi) e^{-i\beta z} \quad (6.1-10a)$$

$$\vec{H} = \vec{H}(r, \varphi) e^{-i\beta z} \quad (6.1-10b)$$

并有 $\partial^2/\partial z^2 = -\beta^2$ ，由此结合式 (6.1-9)，矢量 Helmholtz 方程式 (6.1-8) 可写成如下三个分量形式

$$\vec{r}_0 \text{ 方向: } \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{\partial}{\partial r} E_r \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} E_r - \frac{E_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} E_\varphi + (n^2 K_0^2 - \beta^2) E_r = 0 \quad (6.1-11)$$

$$\vec{\varphi}_0 \text{ 方向: } \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} E_\varphi \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} E_\varphi - \frac{E_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} E_r + (n^2 K_0^2 - \beta^2) E_\varphi = 0 \quad (6.1-12)$$

$$\vec{z}_0 \text{ 方向: } \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} E_z \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} E_z + (n^2 K_0^2 - \beta^2) E_z = 0 \quad (6.1-13)$$

同理，磁场强度分量也满足与如上形式完全相同的三个微分方程，其中 H_z 的方程为

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} H_z \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} H_z + (n^2 K_0^2 - \beta^2) H_z = 0 \quad (6.1-14)$$

方程式 (6.1-11) 和式 (6.1-12) 是含有 E_r 和 E_φ (或 H_r 、 H_φ) 的交叉方程，也表明在柱坐标系中，电磁场的横向分量是不满足标量形式的 Helmholtz 方程的。由方程式 (6.1-13) 和式 (6.1-14) 可知，纵向分量 E_z 和 H_z 满足单纯标量形式的 Helmholtz 方程，容易先对其进行求解。

电磁场的其他分量可由 Maxwell 方程得到。柱坐标下，场矢量的旋度可表示为

$$\nabla \times \vec{E} = \vec{r}_0 \left(\frac{\partial}{r \partial \varphi} E_z - \frac{\partial}{\partial z} E_\varphi \right) + \vec{\varphi}_0 \left(\frac{\partial}{\partial z} E_r - \frac{\partial}{\partial r} E_z \right) + \vec{z}_0 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} E_r \right) \quad (6.1-15)$$

根据基本方程 $\nabla \times \vec{E} = -i\omega\mu\vec{H}$ 及 $\nabla \times \vec{H} = i\omega\varepsilon\vec{E}$ ，有相应的分量方程

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} E_z + i\beta E_\varphi = -i\omega\mu H_r \quad (1)$$

$$i\beta E_r + \frac{\partial}{\partial r} E_z = i\omega\mu H_\varphi \quad (2)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} E_r = -i\omega\mu H_z \quad (3)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} H_z + i\beta H_\varphi = i\omega\varepsilon E_r \quad (4)$$

$$i\beta H_r + \frac{\partial}{\partial r} H_z = -i\omega\varepsilon E_\varphi \quad (5)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_\varphi) - \frac{\partial}{r \partial \varphi} H_r = i\omega\varepsilon E_z \quad (6)$$

由式②、④得

$$K_c^2 E_r = -i\beta \frac{\partial E_z}{\partial r} - \frac{i\omega\mu}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \quad (6.1-16)$$

$$\text{由式①、⑤得} \quad K_c^2 E_\phi = -\frac{i\beta}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} + i\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial r} \quad (6.1-17)$$

$$\text{由式①、⑤得} \quad K_c^2 H_r = \frac{i\omega\varepsilon}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - i\beta \frac{\partial H_z}{\partial r} \quad (6.1-18)$$

$$\text{由式②、④得} \quad K_c^2 H_\phi = -i\omega\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial r} - \frac{i\beta}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} \quad (6.1-19)$$

$$\text{式中} \quad K_c^2 = n^2 K_0^2 - \beta^2 \quad (6.1-20)$$

这样，电磁场的横向分量 E_r 、 E_ϕ 、 H_r 、 H_ϕ 均可以用纵向分量 E_z 和 H_z 表示。

6.2 阶跃光纤电磁场方程的矢量解法

6.2.1 芯区和包层的电磁场

考虑具有如图 6.2 所示的折射率分布的阶跃光纤，纤芯半径为 a ，折射率为 n_1 ，包层折射率为 n_2 。光纤芯区和包层内场的纵向分量 E_z 和 H_z 均满足标量形式的 Helmholtz 方程，重写如下

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} E_z + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} E_z + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} E_z + K_c^2 E_z = 0 \quad (6.2-1a)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} H_z + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} H_z + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} H_z + K_c^2 H_z = 0 \quad (6.2-1b)$$

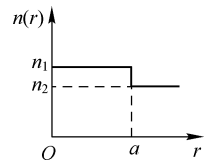


图 6.2 阶跃光纤折射率分布

该类型微分方程的一般解法是我们熟知的分离变量法，设

$$E_z(r, \phi, z) = AR(r)\Phi(\phi)e^{-i\beta z} \quad (6.2-2a)$$

$$H_z(r, \phi, z) = BR(r)\Phi(\phi)e^{-i\beta z} \quad (6.2-2b)$$

分别代入式 (6.2-1a) 和式 (6.2-1b)，得

$$\frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{r}{R} \frac{dR}{dr} + K_c^2 r^2 = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} \quad (6.2-3)$$

方程等号左边是 r 的函数，右边是 ϕ 的函数， r 和 ϕ 是相互独立的变量，上式对任意的 r 和 ϕ 都成立，方程两边只能等于某一常数，设该常数为 m^2 。于是，将方程分解成径向函数 R 和角向函数 Φ 各自所满足的微分方程

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} + (K_c^2 r^2 - m^2)R = 0 \quad (6.2-4)$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + m^2 \Phi = 0 \quad (6.2-5)$$

其中常数取作 m^2 ，是由角向函数 $\Phi(\phi)$ 必是以 2π 为周期的周期函数所限定的，而且 m 只能取整数，即 $m=0, 1, 2, \dots$ 。这样方程式 (6.2-5) 的解 Φ 可以是 $e^{im\phi}$ 、 $e^{-im\phi}$ 、 $\sin m\phi$ 或 $\cos m\phi$ ，它们分别对应右旋波、左旋波和驻波。因为 E_z 和 H_z 满足的方程形式完全相同，通常，如果 E_z 选择 $\Phi = \sin m\phi$ ，则 H_z 选择 $\Phi = \cos m\phi$ ；反之， E_z 选择 $\Phi = \cos m\phi$ ，则 H_z 选择 $\Phi = \sin m\phi$ 。为了在边界上满足场的匹配关系，芯区和包层中的 $\Phi(\phi)$ 应按相同的规律变化。

为得到径向分布函数 $R(r)$ ，需解方程式 (6.2-4)，该方程是贝塞尔 (Bessel) 方程，解有多种形式，芯区和包层必须分开求解。

光纤芯区内, $r \leq a$, $n = n_1$, $K_c^2 = n_1^2 K_0^2 - \beta^2$ 。芯区内的波矢分量必须小于波矢本身的大小才有物理意义, 即要求 $\beta^2 < n_1^2 K_0^2$, 所以 $K_c^2 > 0$ 。令 $K_c r = x$, 代入方程式 (6.2-4), 得

$$x^2 \frac{d^2 R}{dx^2} + x \frac{dR}{dx} + (x^2 - m^2)R = 0 \quad (6.2-6)$$

此方程是标准的 Bessel 方程, 其解可能是 m 阶贝塞尔函数 $J_m(x)$ 或者第二类贝塞尔函数 $Y_m(x)$ (又称 Neumann 函数, 记作 $N_m(x)$) (见附录 A)。 $J_m(K_c r)$ 和 $Y_m(K_c r)$ 都是振荡函数, 但是, 当 $r \rightarrow 0$ 时, 函数 $Y_m(K_c r) \rightarrow -\infty$, 是发散的, 不是物理意义上的合理解, 所以方程的解只能是

$$R(r) = J_m(K_c r) \quad (6.2-7)$$

将径向函数 $R(r)$ 和角向函数 $\Phi(\varphi)$ 的表达式代入式 (6.2-2), 得芯区内的电磁场的纵向分量为

$$E_{z1} = A_1 J_m(K_c r) \begin{pmatrix} \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{pmatrix} e^{-i\beta z} \quad (6.2-8a)$$

$$H_{z1} = B_1 J_m(K_c r) \begin{pmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{pmatrix} e^{-i\beta z} \quad (6.2-8b)$$

光纤包层内, $r > a$, $n = n_2$, $K_c^2 = n_2^2 K_0^2 - \beta^2$, 根据物理要求, 光波必须集中在纤芯内传输, 包层中场沿径向向外一定是衰减的。满足 Bessel 方程式 (6.2-4), 且具有衰减特性的解是第二类变形 Bessel 函数 $K_m(x)$, 或称虚宗量的 Bessel 函数。这种解对应的变形 Bessel 方程为

$$x^2 \frac{d^2 R}{dx^2} + x \frac{dR}{dx} - (x^2 + m^2)R = 0 \quad (6.2-9)$$

因此要求包层中的 K_c^2 一定小于零, K_c 为虚数, 即传输常数 β 必须满足 $\beta^2 > n_2^2 K_0^2$, 才能得到上式所示的变形 Bessel 方程。设

$$\alpha_c = \sqrt{\beta^2 - n_2^2 K_0^2} \quad (6.2-10)$$

并令 $\alpha_c r = x$, 方程式 (6.2-4) 变换为方程式 (6.2-9), 其解为

$$R(r) = K_m(\alpha_c r) \quad (6.2-11)$$

所以包层中电磁场的纵向分量为

$$E_{z2} = A_2 K_m(\alpha_c r) \begin{pmatrix} \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{pmatrix} e^{-i\beta z} \quad (6.2-12a)$$

$$H_{z2} = B_2 K_m(\alpha_c r) \begin{pmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{pmatrix} e^{-i\beta z} \quad (6.2-12b)$$

于是, 对阶跃式光纤, 波动理论同样可得出导模存在的必要条件为 $n_2 K_0 < \beta < n_1 K_0$ 。假如此条件不满足, 如当 $\beta < n_2 K_0$ 时, 包层中径向函数满足的方程也是标准的 Bessel 方程, 解可能是振荡形式的 Bessel 函数 $J_m(K_c r)$ (此处 $K_c^2 = n_2^2 K_0^2 - \beta^2$), 也可能是 Neumann 函数 $Y_m(K_c r)$, 或者是二者的组合, 总之, 说明包层中存在辐射场, 光纤中的场模式是辐射模。

下面引入几个重要参量, 以表征光纤的模式特征和结构

$$U = K_c a = a \sqrt{n_1^2 K_0^2 - \beta^2} \quad (6.2-13)$$

$$W = \alpha_c a = a \sqrt{\beta^2 - n_2^2 K_0^2} \quad (6.2-14)$$

式中, U 为光纤的归一化径向相位常数, W 为归一化径向衰减常数, 二者都是无量纲参数, 与模式有关, 也称作模参量, 它们分别用于表示导模场在芯区和包层中沿径向的变化情况。

另一个重要的无量纲参量为

$$V = \sqrt{U^2 + W^2} = aK_0 \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = aK_0 n_1 \sqrt{2\Delta} \quad (6.2-15)$$

称作归一化频率，也是光纤的设计参量，与光纤结构参数和工作波长有关，与模式无关。模式远离截止时， $U \rightarrow 0$ ， $W \rightarrow V$ ；模式在截止状态时， $W=0$ ， $U=V$ 。

利用光纤的边界条件，在纤芯和包层的界面上，电磁场的切向分量必须连续，由此可以确定场解中的部分待定参数。首先根据纵向场连续给出 A_1 与 A_2 、 B_1 与 B_2 的关系。由 $E_{z1}|_{r=a} = E_{z2}|_{r=a}$ ， $H_{z1}|_{r=a} = H_{z2}|_{r=a}$ ，得

$$A_1 J_m(U) = A_2 K_m(W) = A \quad (6.2-16a)$$

$$B_1 J_m(U) = B_2 K_m(W) = B \quad (6.2-16b)$$

这样，纤芯和包层的纵向电磁场分量为

$$E_{z1} = \frac{A}{J_m(U)} J_m(Ur/a) \sin m\varphi e^{-i\beta z} \quad (r < a) \quad (6.2-17a)$$

$$E_{z2} = \frac{A}{K_m(W)} K_m(Wr/a) \sin m\varphi e^{-i\beta z} \quad (r > a) \quad (6.2-17b)$$

$$H_{z1} = \frac{B}{J_m(U)} J_m(Ur/a) \cos m\varphi e^{-i\beta z} \quad (r < a) \quad (6.2-18a)$$

$$H_{z2} = \frac{B}{K_m(W)} K_m(Wr/a) \cos m\varphi e^{-i\beta z} \quad (r > a) \quad (6.2-18b)$$

利用式 (6.1-16) ~ 式 (6.1-19)，可得纤芯和包层的横向电磁场分量分别为

$$E_{r1} = -i \left(\frac{a}{U} \right)^2 \frac{1}{J_m(U)} \left[-\frac{\omega \mu m B}{r} J_m(Ur/a) + \frac{\beta U A}{a} J'_m(Ur/a) \right] \sin m\varphi \quad (6.2-19a)$$

$$E_{r2} = i \left(\frac{a}{W} \right)^2 \frac{1}{K_m(W)} \left[-\frac{\omega \mu m B}{r} K_m(Wr/a) + \frac{\beta W A}{a} K'_m(Wr/a) \right] \sin m\varphi \quad (6.2-19b)$$

$$E_{\varphi 1} = -i \left(\frac{a}{U} \right)^2 \frac{1}{J_m(U)} \left[\frac{\beta m A}{r} J_m(Ur/a) - \frac{\omega \mu U B}{a} J'_m(Ur/a) \right] \cos m\varphi \quad (6.2-20a)$$

$$E_{\varphi 2} = i \left(\frac{a}{W} \right)^2 \frac{1}{K_m(W)} \left[\frac{\beta m A}{r} K_m(Wr/a) - \frac{\omega \mu W B}{a} K'_m(Wr/a) \right] \cos m\varphi \quad (6.2-20b)$$

$$H_{r1} = -i \left(\frac{a}{U} \right)^2 \frac{1}{J_m(U)} \left[-\frac{\omega \varepsilon_0 n_1^2 m A}{r} J_m(Ur/a) + \frac{\beta U B}{a} J'_m(Ur/a) \right] \cos m\varphi \quad (6.2-21a)$$

$$H_{r2} = i \left(\frac{a}{W} \right)^2 \frac{1}{K_m(W)} \left[-\frac{\omega \varepsilon_0 n_2^2 m A}{r} K_m(Wr/a) + \frac{\beta W B}{a} K'_m(Wr/a) \right] \cos m\varphi \quad (6.2-21b)$$

$$H_{\varphi 1} = -i \left(\frac{a}{U} \right)^2 \frac{1}{J_m(U)} \left[-\frac{\beta m B}{r} J_m(Ur/a) + \frac{\omega \varepsilon_0 n_1^2 U A}{a} J'_m(Ur/a) \right] \sin m\varphi \quad (6.2-22a)$$

$$H_{\varphi 2} = i \left(\frac{a}{W} \right)^2 \frac{1}{K_m(W)} \left[-\frac{\beta m B}{r} K_m(Wr/a) + \frac{\omega \varepsilon_0 n_2^2 W A}{a} K'_m(Wr/a) \right] \sin m\varphi \quad (6.2-22b)$$

以上横场分量表达式均省略了相位传播因子 $e^{-i\beta z}$ 项，式中 Bessel 函数的导数都是对宗量求导。为显示清楚，上述横场分量是在 E_z 的角向分布函数取 $\sin m\varphi$ 、 H_z 取 $\cos m\varphi$ 的条件下给出的一组解。

场的表达式中特征参量 U 、 W 、 β 目前还是待定的， A 、 B 也是待定的，只有把这些参数确定下来，光纤中导模的传播特性和场的分布才能最终确定。模参量将通过由场的其他边值

关系获得的特征方程给出, 待定量 A 、 B 则由模功率确定。

6.2.2 导模特征方程

根据电磁场的边界条件, 由切向分量连续, 在 $r=a$ 柱面上, 应有

$$E_{z1} = E_{z2}, \quad H_{z1} = H_{z2}, \quad E_{\phi1} = E_{\phi2}, \quad H_{\phi1} = H_{\phi2}$$

z 分量连续的条件在给出电磁场分量表达式 A 、 B 系数的过程中已经考虑过了。根据场分量表示式 (6.2-20) 和 (6.2-22), 由 $E_{\phi1}|_{r=a} = E_{\phi2}|_{r=a}$, $H_{\phi1}|_{r=a} = H_{\phi2}|_{r=a}$, 可得

$$\omega\mu B \left[\frac{J'_m(U)}{UJ_m(U)} + \frac{K'_m(W)}{WK_m(W)} \right] = \beta mA \left(\frac{1}{U^2} + \frac{1}{W^2} \right) \quad (6.2-23)$$

$$\omega\varepsilon_0 A \left[\frac{n_1^2 J'_m(U)}{UJ_m(U)} + \frac{n_2^2 K'_m(W)}{WK_m(W)} \right] = \beta mB \left[\frac{1}{U^2} + \frac{1}{W^2} \right] \quad (6.2-24)$$

如果系数 A 、 B 不为零, 两式相乘, 消去 A 、 B , 得

$$\left[\frac{J'_m(U)}{UJ_m(U)} + \frac{K'_m(W)}{WK_m(W)} \right] \left[\frac{n_1^2 J'_m(U)}{UJ_m(U)} + \frac{n_2^2 K'_m(W)}{WK_m(W)} \right] = m^2 \frac{\beta^2}{K_0^2} \left(\frac{1}{U^2} + \frac{1}{W^2} \right)^2 \quad (6.2-25)$$

利用 $\beta^2 = n_1^2 K_0^2 - \frac{U^2}{a^2}$ 及 $\beta^2 = n_2^2 K_0^2 + \frac{W^2}{a^2}$, 上式也可以写成另一种形式

$$\left[\frac{J'_m(U)}{UJ_m(U)} + \frac{K'_m(W)}{WK_m(W)} \right] \left[\frac{n_1^2 J'_m(U)}{UJ_m(U)} + \frac{n_2^2 K'_m(W)}{WK_m(W)} \right] = m^2 \left(\frac{1}{U^2} + \frac{1}{W^2} \right) \left(\frac{n_1^2}{U^2} + \frac{n_2^2}{W^2} \right) \quad (6.2-26)$$

式 (6.2-25) 或者式 (6.2-26) 就是严格的光纤导模特征方程。方程含有待定的特征参量 U 、 W 、 β , 根据 $U = a\sqrt{n_1^2 K_0^2 - \beta^2}$, $W = a\sqrt{\beta^2 - n_2^2 K_0^2}$, 三个参量中只有一个是独立的, 在已知光纤结构参数和工作波长的条件下, 解特征方程就可以计算出各 m 值下导模的 U 、 W 及传播常数 β , 从而确定导模场的空间分布。

6.2.3 导模分类

光纤中的电磁场模式是满足电磁场方程和边界条件的特定的电磁场分布。根据模序数 m 和场的特性, 可以将光纤中导模分为 TE 模、TM 模、EH 模和 HE 模四类。

1. TE 模和 TM 模

TE 模和 TM 模是对应于 $m=0$ 的两种场模式。由式 (6.2-23) 和式 (6.2-24), 可得

$$\omega\mu B \left[\frac{J'_m(U)}{UJ_m(U)} + \frac{K'_m(W)}{WK_m(W)} \right] = 0 \quad (6.2-27)$$

$$\omega\varepsilon_0 A \left[n_1^2 \frac{J'_m(U)}{UJ_m(U)} + n_2^2 \frac{K'_m(W)}{WK_m(W)} \right] = 0 \quad (6.2-28)$$

以上二式同时为零, 但 A 、 B 不能同时为零, 否则不存在电磁场, 而方括号中的两项也不能同时为零, 所以 A 和 B 中必有一个为零, 这样, 就把场分成两套独立的场分量。

- 当 $A=0$ 时, 一定有 $B \neq 0$, 这时 $E_z=0$, $H_z \neq 0$, 电场只有横向分量, 所以电磁场模式为 TE 模式, 由式 (6.2-27), 必有

$$\frac{J'_0(U)}{UJ_0(U)} + \frac{K'_0(W)}{WK_0(W)} = 0 \quad (6.2-29)$$

根据 Bessel 函数递推关系, $J'_0 = -J_1$, $K'_0 = -K_1$, 上式简化为

$$\frac{J_1(U)}{UJ_0(U)} + \frac{K_1(W)}{WK_0(W)} = 0 \quad (6.2-30)$$

此式为 TE 模的特征方程。

- 当 $B=0$ 时, 一定有 $A \neq 0$, 这时 $E_z \neq 0$, $H_z = 0$, 磁场只有横向分量, 所以电磁场模式为 TM 模式, 由式 (6.2-28), 必有

$$n_1^2 \frac{J'_0(U)}{UJ_0(U)} + n_2^2 \frac{K'_0(W)}{WK_0(W)} = 0 \quad (6.2-31)$$

$$\text{可简化为} \quad \frac{n_1^2 J_1(U)}{UJ_0(U)} + \frac{n_2^2 K_1(W)}{WK_0(W)} = 0 \quad (6.2-32)$$

这是 TM 模的特征方程。

在弱导近似条件下, $\Delta = (n_1 - n_2)/n_1 \ll 1$, 包层的折射率 n_2 仅略小于纤芯的折射率 n_1 , 可以认为 $n_2 \approx n_1$, 所以弱导光纤的 TE 模和 TM 模有共同的特征方程。求解特征方程得到的 β 也是相同的, 所以, TE 模与 TM 模是简并的, 两类模式共存。TE 模的场分量 $E_z = 0$, 电场是横场, 非零的场分量为 E_ϕ 、 H_r 、 H_z 。而 TM 模的场分量 $H_z = 0$, 磁场是横场, 非零的场分量为 H_ϕ 、 E_r 、 E_z 。

$m=0$ 时, 场的特性与角坐标 ϕ 无关, 各场分量不含 ϕ , 所以, TE 模和 TM 模的电磁场是各向同性的轴对称场。

第 3 章用几何光学理论分析光纤中的光线时, 由光线不变量 $nr^2 d\phi/ds = av$ 可知, 对子午线而言, 光线旋转常数 $\nu=0$, 故 ϕ 是常量。因此 TE 模和 TM 模与光纤中的子午线是对应的。

2. EH 模和 HE 模

对于 $m \neq 0$ 的情况, 从式 (6.2-23) 或式 (6.2-24) 可以看出, 如果假设 A 、 B 中一个为零, 另一个也一定为零, 这是无意义的, 所以 A 和 B 均不能为零, 即 E_z 和 H_z 同时存在, 这种电磁场模式称为混合模。 $m \neq 0$ 时, 有两种混合模式, 即 EH 模和 HE 模。

$$\text{为简单起见, 令} \quad J = \frac{J'_m(U)}{UJ_m(U)} \quad (6.2-33)$$

$$K = \frac{K'_m(W)}{WK_m(W)} \quad (6.2-34)$$

则特征方程式 (6.2-26) 可展开为

$$J^2 + \left(1 + \frac{n_2^2}{n_1^2}\right) KJ + \frac{n_2^2}{n_1^2} K^2 = m^2 \left(\frac{1}{U^2} + \frac{1}{W^2}\right) \left(\frac{1}{U^2} + \frac{n_2^2}{n_1^2} \frac{1}{W^2}\right)$$

这可看作是一个关于 J 的二次代数方程, 其解为

$$J = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{n_2^2}{n_1^2}\right) K \pm \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{n_2^2}{n_1^2}\right)^2 K^2 - 4 \frac{n_2^2}{n_1^2} K^2 + 4m^2 \left(\frac{1}{U^2} + \frac{1}{W^2}\right) \left(\frac{1}{U^2} + \frac{n_2^2}{n_1^2} \frac{1}{W^2}\right) \right]^{1/2} \quad (6.2-35)$$

上式中的“ \pm ”号取“ $+$ ”时对应 EH 模, 相应的表示式为 EH 模的特征方程; 取“ $-$ ”时对应 HE 模, 相应的表示式为 HE 模的特征方程。这样给出的 EH 模和 HE 模的特征方程是精确的, 自然可以求解得出传播常数。鉴于方程较为复杂, 不做详细讨论。为了能直接理解 EH 模和 HE 模, 又使分析简便, 这里主要讨论弱导近似的情况。因为光通信中使用的光纤大多是弱导光纤, 所以分析弱导光纤的模式更有实际意义。

当 $n_2 \approx n_1$ 时, 式 (6.2-35) 可简化为

$$J + K = \pm m \left(\frac{1}{U^2} + \frac{1}{W^2} \right) \quad (6.2-36a)$$

即

$$\frac{J'_m(U)}{UJ_m(U)} + \frac{K'_m(W)}{WK_m(W)} = \pm m \left(\frac{1}{U^2} + \frac{1}{W^2} \right) \quad (6.2-36b)$$

令 $n_2 \approx n_1$ ，由式 (6.2-26) 也可以直接得出该结果。此方程为弱导条件下，光纤的特征方程。方程右端取 “+” 号时为 EH 模的特征方程，取 “-” 号时为 HE 模的特征方程。 $m=0$ 时则为 TE 模和 TM 模的特征方程。

利用 Bessel 函数的递推关系

$$J'_m(U) = \frac{m}{U} J_m(U) - J_{m+1}(U) = -\frac{m}{U} J_m(U) + J_{m-1}(U)$$

$$K'_m(W) = \frac{m}{W} K_m(W) - K_{m+1}(W) = -\frac{m}{W} K_m(W) - K_{m-1}(W)$$

由式 (6.2-36) 给出简化的 EH 模和 HE 模的特征方程

$$\frac{J_{m+1}(U)}{UJ_m(U)} + \frac{K_{m+1}(W)}{WK_m(W)} = 0 \quad (\text{EH 模}) \quad (6.2-37)$$

$$\frac{J_{m-1}(U)}{UJ_m(U)} - \frac{K_{m-1}(W)}{WK_m(W)} = 0 \quad (\text{HE 模}) \quad (6.2-38)$$

根据式 (6.2-36) 及式 (6.2-23) 可知：EH 模，系数 A 与 B 同号；HE 模， A 与 B 反号。对 EH 模和 HE 模，电磁场各分量 E_z 、 E_ϕ 、 E_r 、 H_z 、 H_ϕ 、 H_r 都不为零，且与角坐标 ϕ 有关，没有轴对称性。场在角向上可能呈 $\sin m\phi$ 或 $\cos m\phi$ 的形式，有固定的角分布，也可能呈 $e^{im\phi}$ 或 $e^{-im\phi}$ 的形式，按左旋、右旋的规律变化。因此，EH 模和 HE 模与空间偏斜光线是对应的，场的旋转与偏斜光线的旋进性相一致。

6.2.4 导模截止条件与单模传输

光纤中导模场传输时，如果 $\beta \leq n_2 K_0$ 就表明光线违背全反射条件，折射进入包层，出现辐射损耗，电磁波不能沿轴向长距离传输，这种状态称为导模截止，得到的波动方程的解为辐射模。由波动理论，场的径向分布函数满足下面的方程

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} + [(n^2 K_0^2 - \beta^2) r^2 - m^2] R = 0$$

当 $\beta > n_2 K_0$ 时，包层中的场方程对应变形 Bessel 方程，解为衰减波； $\beta < n_2 K_0$ 时，解沿径向也表现出振荡形式，形成辐射模。所以，传播常数的截止限 $\beta_c = n_2 K_0$ 。 β 靠近 $n_2 K_0$ 时，称为近截止状态； β 靠近 $n_1 K_0$ 时，称为远离截止状态。对于某个导模，光纤的模参量，即归一化径向相位常数 U 和归一化径向衰减常数 W 的取值范围都在 $0 \sim V$ 之间， W 的截止限为 $W_c = 0$ ，设 U 的截止限为 U_c ，此时的归一化频率即为归一化截止频率 V_c ，显然 $V_c = U_c$ ，表示 V 取 U_c 时该导模截止，由 V_c 可得光纤结构参数或者传输的光波长的截止限。 V 为光纤的设计参数，可以根据需要选择不同的值。

TE 模、TM 模、EH 模和 HE 模这四类导模，其实每一类又都是由一系列模式构成的，分别标记为 TE_{0n} 、 TM_{0n} 、 EH_{mn} 、 HE_{mn} ，其中 m 是与场的角分布有关的模式序数，相当于转动量子数，TE 模、TM 模的 $m=0$ ，EH 模、HE 模的 $m=1, 2, 3 \cdots$ ； n 是与场的径向分布有关的模式序数， $n=1, 2, 3 \cdots$ 。下面根据各类模的特征方程，对其特性做详细分析。

1. TE_{0n} 模和 TM_{0n} 模

将 TE 模与 TM 模做简并模处理，它们有共同的特征方程，即

$$\frac{J_1(U)}{UJ_0(U)} = -\frac{K_1(W)}{WK_0(W)} \quad (6.2-39)$$

方程等号左端以 U 为变量的函数 $J(U) = J_1(U)/UJ_0(U)$ 是一个多支函数，类似于 $\tan U$ 。当 $U \rightarrow 0$ 时，零阶 Bessel 函数 $J_0(U) \rightarrow 1 - U^2/4$ ，一阶 Bessel 函数 $J_1(U) \rightarrow U/2$ ，所以 $J(0) = 1/2$ 。

Bessel 函数 $J_m(U)$ 是振荡函数，有无穷多个零点。

$J_0(U)$ 的零点记作 $u_{01}, u_{02}, u_{03}, \dots, u_{0n}, \dots$ 即 $J_0(u_{0n}) = 0$ 。 $J_1(U)$ 的零点，记作 $u_{11}, u_{12}, u_{13}, \dots, u_{1n}, \dots$ 即 $J_1(u_{1n}) = 0$ 。 $J_m(U)$ 的第 n 个零点记作 u_{mn} 。4 个低阶 Bessel 函数的前 5 个零点见表 6.1。显然，当 $U \rightarrow u_{0n}$ 时， $J(U) \rightarrow \pm \infty$ ；而 $U \rightarrow u_{1n}$ 时， $J(U) \rightarrow 0$ 。多支的 $J(U)$ 函数曲线如图 6.3 所示。

表 6.1 $J_m(x)$ 的零点 u_{mn}

n	J_0	J_1	J_2	J_3
1	2.40483	3.83171	5.13562	6.38016
2	5.52008	7.01559	8.41724	9.76102
3	8.65373	10.17347	11.61984	13.01520
4	11.79153	13.32369	14.79595	16.22347
5	14.93092	16.47063	17.95982	19.40942

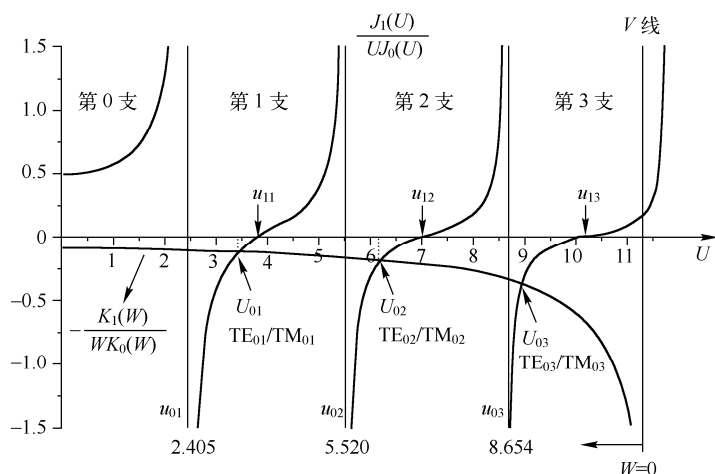


图 6.3 TE/TM 模特征方程图像解法

方程右端是以 W 为变量的函数，设 $K(W) = K_1(W)/WK_0(W)$ ，这是一个随 W 增大而单值单调递减的函数。

$$W \rightarrow 0 \text{ 时, } K \rightarrow -\frac{1/W}{W \ln(2/W)} \rightarrow \infty$$

$$W \gg 1 \text{ 时, } \frac{K_1(W)}{K_0(W)} \rightarrow 1, K = \frac{1}{W} \frac{K_1(W)}{K_0(W)} \rightarrow 0$$

根据 $U = \sqrt{V^2 - W^2}$ ， $K(W)$ 随 U 的增大而单调递增， $W \rightarrow 0$ 即 $U \rightarrow V$ 时， $K \rightarrow \infty$ 。基于上述分析，将 U 作为横轴，在同一图中画出多支的 J 函数曲线和 $-K$ 函数曲线，如图 6.3 所示，那么， $J(U)$ 与 $-K(W)$ 曲线的交点，就代表 TE 与 TM 模特征方程 $J + K = 0$ 的解，从而确定出各模的模参量 U_{0n} 。用该图像解法得到的特征方程的解有一定的误差，更精确的解法为数值计算方法。但这里我们不关注方程的精确解是多少，利用图像法，主要是可以更直观、更容易地分析各导模的截止情况，更便于掌握和理解。

下面通过详细解读图 6.3，来分析 TE/TM 模序列。

首先，曲线 $J(U) = J_1(U)/UJ_0(U)$ 是分支的，而且每支曲线都是递增的，并被限定在

$J_0(U)$ 的相邻零点之间, $J(U)$ 曲线第 n 支的前、后边界分别为 u_{0n} 、 $u_{0,n+1}$ 。曲线 $-K(W) = -K_1(W)/WK_0(W)$ 是在负半轴、随 U 增大而单调递减的曲线, 在 $U=V$ 时趋于 $-\infty$ 。

其次, 由图可知, 在 $0 \sim u_{01}$ 之间的第 0 支曲线区域内特征方程无解, 除此之外, 在 $U < V$ 的范围内, 每支 J 曲线都与 $-K$ 曲线有一个交点, 代表特征方程 $J+K=0$ 的一个解, 用 U_{0n} 表示。所以 TE/TM 模特征方程会有若干个解, 每个解 U_{0n} 代表一个导模, 标记为 TE_{0n} 模或 TM_{0n} 模。 U_{0n} 称作导模的特征值, 由此可以得到该导模的传播常数。

另外, 根据曲线 J 和 K 的特点, 特征值 U_{0n} 一定满足 $u_{0n} < U_{0n} < u_{1n}$, 且 $U_{0n} < V$, 例如 TE_{01} 模或者 TM_{01} 模的特征值 U_{01} 一定在 u_{01} 和 u_{11} 之间, TE_{02} 模或者 TM_{02} 模的特征值 U_{02} 一定在 u_{02} 和 u_{12} 之间, 因此导模 TE_{0n}/TM_{0n} 模存在的条件应该是 $u_{0n} < V$, 即 J 曲线的第 n 支与 K 曲线有交点, 这是导模判据。否则, 如果 $V \leq u_{0n}$, 则 TE_{0n}/TM_{0n} 一定是辐射模。如果 $V > u_{0n}$, 则前 n 支曲线与 $-K$ 曲线必有交点。例如, 当光纤的设计参数满足 $u_{03} < V < u_{04}$ (V 值在 8.65 和 11.79 之间) 时, 则该光纤有 3 个 TE 模和 3 个 TM 模, 即 TE_{01} 、 TE_{02} 、 TE_{03} 和 TM_{01} 、 TM_{02} 、 TM_{03} , 而 TE_{04}/TM_{04} 及以上模式截止。 V 线左侧的 J 支曲线代表导模, 右侧为辐射模。由上述分析可知, TE_{0n}/TM_{0n} 模的特征值 U_{0n} 的截止限为 $U_{0nc} = u_{0n}$, 归一化截止频率为 $V_c = u_{0n}$ 。

最后讨论一下 TE/TM 模的截止条件问题。TE 模与 TM 模有共同的特征方程, TE_{0n} 模和 TM_{0n} 模有共同的特征值, 它们的最低阶模式是 TE_{01} 模和 TM_{01} 模, 其特征值满足 $u_{01} < U_{01} < u_{11}$, 即 $2.405 < U_{01} < 3.832$ 。所以, 归一化频率 V 存在着一个下限 $u_{01}(2.405)$ 。当 $V \leq 2.405$ 时, 光纤中不存在 TE 模和 TM 模, 因为, 即使是最低阶模也处于截止状态。设某光纤的芯半径 $a=4\mu\text{m}$, 芯折射率 $n_1=1.48$, 相对折射率差 $\Delta=0.003$, 欲使 TE 模和 TM 模传输, 需满足 $V = 2\pi a n_1 \sqrt{2\Delta}/\lambda > 2.405$, 代入相关数据, 则有 $\lambda < 1.2\mu\text{m}$ 。即光纤结构已知时, TE 模和 TM 模存在截止波长。对于上面的光纤, $0.85\mu\text{m}$ 光波的 TE 模和 TM 模可以传播, $1.3\mu\text{m}$ 、 $1.5\mu\text{m}$ 光波的 TE 模和 TM 模均不能传播。另一方面, 在已知光传输波长的条件下, 也可以设计光纤的结构参数, 如芯半径和折射率等, 以满足 TE/TM 模截止或可传播的要求。

2. EH_{mn} 模

EH 模的特征方程为

$$\frac{J_{m+1}(U)}{UJ_m(U)} = -\frac{K_{m+1}(W)}{WK_m(W)}$$

方程等号左侧函数设为 $J(U)$, 右侧函数设为 $K(W)$, 上面方程简写为 $J(U) = -K(W)$ 。函数 $J(U)$ 与 $K(W)$ 的渐近行为与上面分析 TE/TM 模时的相关函数类似。当 $U \rightarrow 0$ 时

$$J(U) \rightarrow \frac{(U/2)^{m+1}/(m+1)!}{U(U/2)^m/m!} = \frac{1}{2(m+1)}$$

设 m 阶 Bessel 函数 $J_m(U)$ 的零点为 $u_{m1}, u_{m2}, \dots, u_{mn}, \dots$, 那么有 $J(u_{mn}) \rightarrow \pm \infty$, $J(u_{m+1,n}) = 0$ 。

而当 $W \rightarrow 0$ (即 $U \rightarrow V$) 时

$$-K(W) \rightarrow -\frac{m!(W/2)^{-(m+1)}}{W(m-1)!(W/2)^{-m}} \rightarrow -\infty$$

$$W \gg 1 \text{ 时} \quad -K(W) \rightarrow -\frac{1}{W} \left(1 + \frac{1+2m}{2W} \right) \rightarrow 0$$

同样将多支的 J 函数曲线和 $-K$ 函数曲线画在一张以 U 作为横轴的图中, 如图 6.4 所示, 那么, $J(U)$ 与 $-K(U)$ 曲线的一系列交点, 就代表 EH 模特征方程 $J = -K$ 的解 U_{mn} , 分别对应 EH 模的一系列导模 EH_{mn} 。

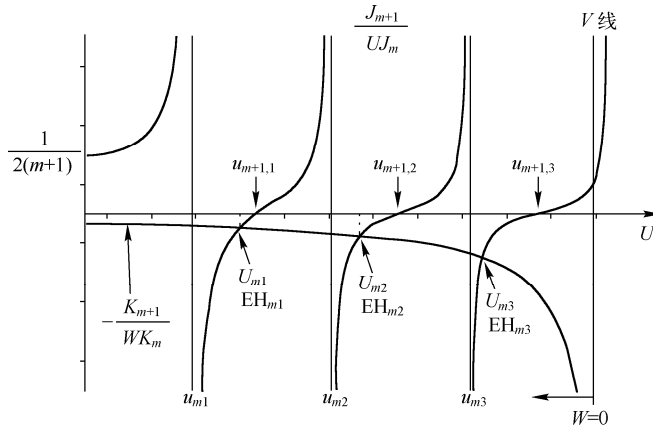


图 6.4 EH_{mn} 模的 J - K 曲线

由图 6.4 可以分析 EH_{mn} 模的一些特性。 J 曲线的每个分支限定在 J_m 的相邻两个零点 u_{mn} 和 $u_{m,n+1}$ 之间，与处于负半轴的 $-K$ 曲线的每个交点显然位于 J 的负半支上，所以 EH_{mn} 模特征值的范围为 $u_{mn} < U_{mn} < u_{m+1,n}$ ，即导模 EH_{mn} 特征值的截止限为 $U_{mnc} = u_{mn}$ 。因为对于导模，一定要满足 $U < V$ ，所以 EH_{mn} 导模存在的条件是 $u_{mn} < V$ ，归一化截止频率 $V_c = u_{mn}$ ，当 $V \leq u_{mn}$ 时， EH_{mn} 及其以上各模截止。 V 线以前的零点 u_{mn} 数目，即为 EH 模的导模数目。

EH 模的最低阶模是 EH_{11} 模，所以对 EH 模来说，归一化频率 V 存在截止下限 $V_c = u_{11}$ (3.832)。当 $V > 3.832$ 时， EH 模可以传输；当 $V \leq 3.832$ 时，所有的 EH_{mn} 模全部截止。例如对于 $a=4\mu\text{m}$ ， $n_1=1.48$ ， $\Delta=0.003$ 的光纤，若要使 EH 模传输，至少要求 $V = 2\pi a n_1 \sqrt{2\Delta} / \lambda > 3.832$ ，即需要满足 $\lambda < 0.75\mu\text{m}$ ，也表示该光纤不能传输波长在 $0.75\mu\text{m}$ 以上光波的 EH 模。

3. HE_{mn} 模

$$\text{HE 模的特征方程为} \quad \frac{J_{m-1}(U)}{UJ_m(U)} = \frac{K_{m-1}(W)}{WK_m(W)}$$

可简记作 $J(U) = K(W)$ 。该方程右端 $K(W)$ 函数的渐近行为对于 $m=1$ 和 $m \geq 2$ 两种情况是不同的，所以分开讨论。

(1) $m=1$ (HE_{1n} 模)

$$\text{HE}_{1n} \text{ 模的特征方程为} \quad \frac{J_0(U)}{UJ_1(U)} = \frac{K_0(W)}{WK_1(W)} \quad (6.2-40)$$

方程等号左端 $J(U)$ 仍是一个多支函数，但每支都是递减的。当 $U \rightarrow 0$ 时， $J(U) \rightarrow 1/(U \cdot U/2) \rightarrow \infty$ ，并且显然 $J(u_{0n})=0$ ， $J(u_{1n}) \rightarrow \pm \infty$ 。而方程等号右端， $W \rightarrow 0$ 时， $K(W) \rightarrow \ln(2/W)/(W \cdot 1/W) \rightarrow \infty$ ； $W \gg 1$ 时， $K(W) \rightarrow 1/W \rightarrow 0$ ，见图 6.5。

从 HE_{1n} 模特征方程的 J - K 曲线图可以看出，因 J 、 K 曲线的各交点处于 J 支线的上半段，所以 HE_{1n} 模的特征值 U_{1n} 在 $u_{1,n-1}$ 和 u_{0n} 之间。由于 $J_1(0)=0$ ，此处标记 u_{10} 可以认为仍然有效，且 $u_{10}=0$ 。 HE_{1n} 模的特征值 U_{1n} 的截止限为 $U_{1nc} = u_{1,n-1}$ ，例如， HE_{13} 模的截止限 $U_{13c} = u_{12}$ (7.016)， HE_{12} 模的截止限 $U_{12c} = u_{11}$ (3.832)。而最低阶模 HE_{11} 模的特征值最小， U_{11} 在 0 和 u_{01} (2.405) 之间。所以， HE_{11} 模的特征值截止限为零，归一化截止频率 $V_c = 0$ 。 $V > 0$ 是自然满足的，说明对任何结构的光纤和传输波长， HE_{11} 模不截止。在光纤的所有模式中，只有 HE_{11} 模的 V_c 为零，其他模都有不为零的截止限， HE_{11} 模称为光纤主模。

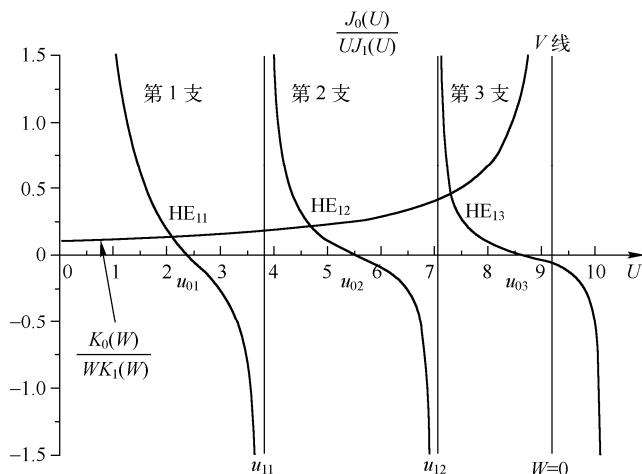


图 6.5 HE_{1n} 模的 J - K 曲线

(2) $m \geq 2$ (HE_{mn} 模)

HE_{mn} 模的特征方程为

$$\frac{J_{m-1}(U)}{UJ_m(U)} = \frac{K_{m-1}(W)}{WK_m(W)}$$

简记作 $J(U) = K(W)$ 。显然 $J(u_{m-1,n}) = 0$, $J(u_{mn}) \rightarrow \pm \infty$, 且 $U \rightarrow 0$ 时

$$J(U) \rightarrow \frac{1/(m-1)!(U/2)^{m-1}}{U/m!(U/2)^m} = \frac{2m}{U^2} \rightarrow \infty$$

区别于 $m=1$ 的情况, $m \geq 2$ 时, $W \rightarrow 0$, $K(W)$ 趋于一个有限值, 即

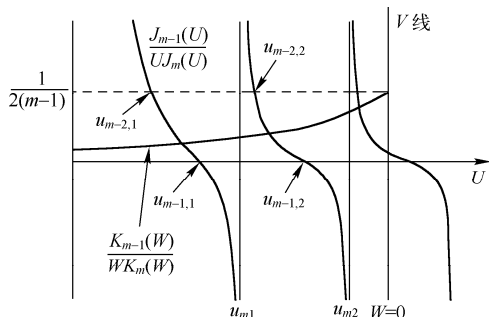
$$K(W) \rightarrow \frac{(m-2)!(W/2)^{-(m-1)}}{W(m-1)!(W/2)^{-m}} = \frac{1}{2(m-1)}$$

当 $W \gg 1$ 时, $K(W) \rightarrow 1/W \rightarrow 0$ 。

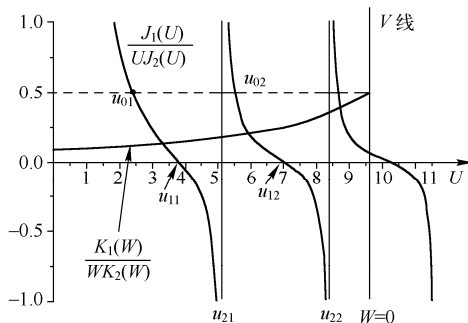
HE_{mn} 模特征方程的 J - K 曲线如图 6.6(a) 所示, 图 6.6(b) 为 $m=2$ 时的情况。由于 J 曲线的各支是递减的, K 曲线在上半轴, 随 U 是递增的, 且在 $U=V$ ($W=0$) 处有最大值 $1/2(m-1)$, 这就决定了 J 、 K 曲线的交点即特征值的范围一定在由

$$\frac{J_{m-1}(U)}{UJ_m(U)} = \frac{1}{2(m-1)} \quad (6.2-41)$$

所决定的 U 值和 $m-1$ 阶 Bessel 函数的零点 $u_{m-1,n}$ 之间。利用递推关系 $2mJ_m(U)/U = J_{m-1}(U) + J_{m+1}(U)$, 上式化简为 $J_{m-2}(U) = 0$ 。因此, 由式 (6.2-41) 决定的 U 恰好是 $m-2$ 阶 Bessel 函数的零点。表明 HE_{mn} 模的特征值 U_{mn} 的范围是 $u_{m-2,n} < U_{mn} < u_{m-1,n}$ 。 U_{mn} 的截止限为 $u_{m-2,n}$, 归一化截止频率 $V_c = u_{m-2,n}$, 如低阶的 HE_{21} 模的截止限为 u_{01} 。对 HE_{2n} 模, $u_{0n} < U_{2n} < u_{1n}$, 所以当 $V > u_{0n}$ 时, HE_{2n} 模至少存在 n 个导模。



(a) HE_{mn} 模



(b) HE_{2n} 模

图 6.6 HE_{mn} 模的 J - K 曲线

综合上述分析，在弱导近似下，将各类模式特征值 U 的范围列于表 6.2 中，以便于查询和比较。当归一化频率 V ，即光纤设计参数小于某模特征值的截止限 U_c 时，则相应的模式截止， U_c 也是该模的归一化截止频率 V_c 。

TE_{0n}/TM_{0n} 模的最低阶模为 TE₀₁/TM₀₁ 模，归一化截止频率 $V_c = u_{01}$ (2.405)；EH_{mn} 模的最低阶模为 EH₁₁ 模， $V_c = u_{11}$ (3.832)；HE_{mn} 模的最低阶模为 HE₁₁ 模， $V_c = 0$ 。因此只要对光纤进行设计，使

$$V = a \frac{2\pi}{\lambda} \cdot n_1 \sqrt{2\Delta} \leq 2.405 \quad (6.2-42)$$

光纤就只传输 HE₁₁ 模，其他模一律截止，从而实现光纤的单模传输。上式就是光纤的单模传输条件。例如，当光纤参数 $\Delta = 0.003$ ， $n_1 = 1.46$ ， $a = 4\mu\text{m}$ 时，对 $\lambda = 1.31\mu\text{m}$ 的光波， $V = 2.17$ ，所以是单模传输；但对 $\lambda = 0.85\mu\text{m}$ 的光波， $V = 3.34$ ，不是单模传输。再如，对 $\Delta = 0.003$ ， $n_1 = 1.46$ 的光纤，若实现 $\lambda = 1.31\mu\text{m}$ 光波的单模传输，则需要光纤半径 $a \leq 4.43\mu\text{m}$ 。通常的单模光纤，直径约为 8~10 μm 。

除 TE 模和 TM 模外，每个混合模 EH_{mn} 或 HE_{mn}，实际上都是双模，因为与角向有关的场函数有两个独立的、互不相关的函数 $\sin m\varphi$ 和 $\cos m\varphi$ ，或者 $e^{im\varphi}$ 和 $e^{-im\varphi}$ ，可以选择 $E_z \sim \sin m\varphi$ 、 $H_z \sim \cos m\varphi$ ，也可以选择 $E_z \sim \cos m\varphi$ 、 $H_z \sim \sin m\varphi$ ，或者在 $e^{im\varphi}$ 和 $e^{-im\varphi}$ 之间选择，所以每个 EH_{mn} 模或 HE_{mn} 模都是二度简并的。表 6.3 列出了一些较低阶模的归一化截止频率 V_c 。表中 V_c 相同的各模，表示在近截止时是简并的，如 TE_{0n}、TM_{0n} 和 HE_{2n} 模，EH_{1n}、HE_{3n} 和 HE_{1,n+1} 模等。其实，在弱导条件下， V_c 相同的各模也具有非常相近甚至相同的特征值或传播常数，可以认为属于简并模。

表 6.2 各类模式特征值 U 的范围

模式	特征值 U	
	截止限 U_c	上限
TE _{0n} /TM _{0n}	u_{0n}	u_{1n}
EH _{mn}	u_{mn}	$u_{m+1,n}$
HE _{1n}	$u_{1,n-1}$	u_{0n}
HE _{mn} ($m \geq 2$)	$u_{m-2,n}$	$u_{m-1,n}$

表 6.3 截止情况下各模的 V_c 值

截止限 V_c	简并模式	简并度	截止限 V_c	简并模式	简并度
0	HE ₁₁	2	5.520/ u_{02}	TE ₀₂ TM ₀₂ HE ₂₂	4
2.405/ u_{01}	TE ₀₁ TM ₀₁ HE ₂₁	4	6.380/ u_{31}	EH ₃₁ HE ₅₁	4
3.832/ u_{11}	EH ₁₁ HE ₃₁ HE ₁₂	6	7.016/ u_{12}	EH ₁₂ HE ₃₂ HE ₁₃	6
5.136/ u_{21}	EH ₂₁ HE ₄₁	4	7.588/ u_{41}	EH ₄₁ HE ₆₁	4

6.2.5 模色散曲线

在光纤参数 a 、 n 、 Δ 及光波长已知的情况下，归一化频率 $V = 2\pi a n_1 \sqrt{2\Delta} / \lambda$ 确定，则由各类导模的特征方程，通过数值解法，可得相应模的特征值 U ，从而可确定其他模参量 W 、 β 。仍按照式 (4.5-25) 定义光纤的归一化传播常数 B ，则有

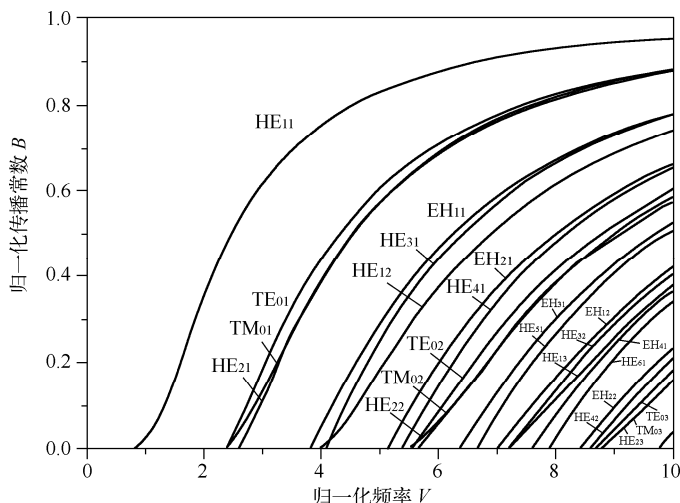
$$U = \sqrt{1 - BV} \quad (6.2-43)$$

$$W = \sqrt{BV} \quad (6.2-44)$$

并且有

$$\beta = n_1 K_0 \sqrt{1 + 2\Delta(B - 1)} \quad (6.2-45)$$

所以各模式的特征方程都可以转化成确定的归一化频率 V 值下关于 B 的方程，由此可以直接求得 B 。由 B 再确定出模参量 U 、 W 、 β ，从而得到各导模的场分布。 V 值改变，各模的 B 随之改变。以 V 为横坐标， B 为纵坐标，可得光纤的归一化模色散曲线，如图 6.7 所示。



为更精确、清晰地显示出光纤的模式色散特性, 数值计算中采用了未经弱导近似的特征方程, TE 模为式(6.2-30), TM 模为式(6.2-32), EH 模和 HE 模利用式(6.2-35), 并且为了表示出其中的差别, 计算中取 $\Delta=0.2$ 。可见, 表 6.3 中列出的在弱导近似下简并的几个模式, 此处简并已经消除, 但仍较接近。 $\Delta \ll 1$ 时一些近似简并的曲线会趋于重合。

6.2.6 导模电磁场分布

前面由光纤中纵向场分量满足的标量 Helmholtz 方程, 求得了电磁场方程的解, 电磁场 6 个分量的一般表达式见式 (6.2-17) ~ 式 (6.2-22)。由切向场分量的连续性条件, 得到 A 、 B 系数的关系式及各类模的特征方程。根据特征方程求出各导模的模参量 β 、 U 、 W 的值, 并代入场分量表达式, 就可以具体确定各导模的场分布。每一个确定的导波模式都对应着一个确定的电磁场分布。下面对光纤中的各类导模场加以分析。

为讨论方便, 将式(6.2-23)及式(6.2-24)所表示的连续性方程重写如下

$$\begin{aligned}\omega\mu B[J+K] &= \beta mA\left(\frac{1}{U^2} + \frac{1}{W^2}\right) \\ \omega\varepsilon_0 A[n_1^2 J + n_2^2 K] &= \beta mB\left(\frac{1}{U^2} + \frac{1}{W^2}\right)\end{aligned}$$

其中, $J = J'_m(U)/UJ_m(U)$, $K = K'_m(W)/WK_m(W)$ 。上面二式相乘即可得到导模的特征方程。

1. TE_{0n} 模和 TM_{0n} 模

TE_{0n} 模的参数 $m=0$, $A=0$, 特征方程为

$$J + K = 0 \quad (6.2-46)$$

由式(6.2-17)~式(6.2-22),并借助于 Bessel 函数的递推公式,可推导出芯区内的 6 个场分量

$$E_r = 0 \quad (6.2-47a)$$

$$E_\varphi = -i \frac{a}{U} \frac{\omega \mu B}{J_0(U)} J_1(Ur/a) \quad (6.2-47b)$$

$$E_r = 0 \quad (6.2-47c)$$

$$H_r = i \frac{a}{U} \frac{\beta B}{J_0(U)} J_1(Ur/a) \quad (6.2-47d)$$

$$H_\varphi = 0 \quad (6.2-47e)$$

$$H_z = \frac{B}{J_0(U)} J_0(Ur/a) \quad (6.2-47f)$$

包层区域的场，只需用 K 代替 J ，用 W 代替 U 即可。以上各式均省略了 $e^{-i\beta z}$ 因子。TE_{0n} 模场分量 $E_z = 0$ ，电场是横场，非零的场分量为 E_φ 、 H_r 、 H_z ，且与 φ 无关，具有轴对称性。

TM_{0n} 模的参数 $m=0$ ， $B=0$ ，特征方程为

$$n_1^2 J + n_2^2 K = 0 \quad (6.2-48)$$

弱导近似下，方程可以简化成与 TE 模相同的形式。TM_{0n} 模芯区的场分布为

$$E_r = i \frac{a}{U} \frac{\beta A}{J_0(U)} J_1(Ur/a) \quad (6.2-49a)$$

$$E_\varphi = 0 \quad (6.2-49b)$$

$$E_z = \frac{A}{J_0(U)} J_0(Ur/a) \quad (6.2-49c)$$

$$H_r = 0 \quad (6.2-49d)$$

$$H_\varphi = i \frac{a}{U} \frac{n_1^2 \omega \varepsilon_0 A}{J_0(U)} J_1(Ur/a) \quad (6.2-49e)$$

$$H_z = 0 \quad (6.2-49f)$$

TM 模场的 $H_z = 0$ ，磁场是横场，非零的场分量 E_r 、 E_z 、 H_φ 同样呈轴对称性。

场分布通常由场线来描述，各点的场线方向表示该点电场、磁场的方向，场线密度表示场幅。TE₀₁ 模和 TM₀₁ 模在芯区内的横向场与 TM₀₁ 模的三维场分布(场型图)如图 6.8 所示。

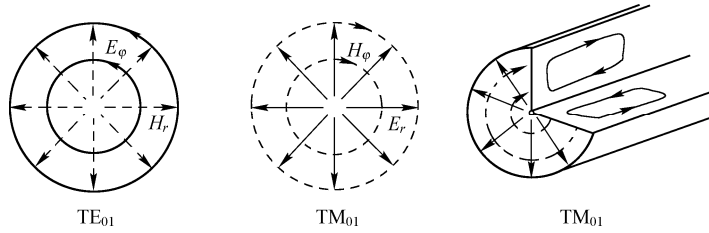


图 6.8 TE 模与 TM 模的场型图

2. EH_{mn} 模和 HE_{mn} 模

这两类模是混合模，参数 $m \neq 0$ ， $A \neq 0$ ， $B \neq 0$ 。弱导条件下，EH_{mn} 模特征方程为

$$J + K = m \left(\frac{1}{U^2} + \frac{1}{W^2} \right) \quad (6.2-50)$$

此时由前面的连续性方程可给出 A 、 B 间的关系式

$$\omega \mu B = \beta A \quad (6.2-51a)$$

$$n_1^2 \omega \varepsilon_0 A = \beta B \quad (6.2-51b)$$

表明 A 、 B 同号，芯区内的 6 个场分量经整理可简化为

$$E_r = i \frac{a}{U} \frac{\beta A}{J_m(U)} J_{m+1}(Ur/a) \sin m\varphi \quad (6.2-52a)$$

$$E_\varphi = -i \frac{a}{U} \frac{\beta A}{J_m(U)} J_{m+1}(Ur/a) \cos m\varphi \quad (6.2-52b)$$

$$E_z = \frac{A}{J_m(U)} J_m(Ur/a) \sin m\varphi \quad (6.2-52c)$$

$$H_r = i \frac{a}{U} \frac{\beta B}{J_m(U)} J_{m+1}(Ur/a) \cos m\varphi \quad (6.2-52d)$$

$$H_\varphi = i \frac{a}{U} \frac{\beta B}{J_m(U)} J_{m+1}(Ur/a) \sin m\varphi \quad (6.2-52e)$$

$$H_z = \frac{B}{J_m(U)} J_m(Ur/a) \cos m\varphi \quad (6.2-52f)$$

包层区域的各场分量，只需用 K 代替 J ，用 W 代替 U 即可。

弱导条件下的 HE_{mn} 模特征方程为

$$J + K = -m \left(\frac{1}{U^2} + \frac{1}{W^2} \right) \quad (6.2-53)$$

由连续性方程给出的 A 、 B 间的关系式为

$$\omega \mu B = -\beta A \quad (6.2-54a)$$

$$n_1^2 \omega \varepsilon_0 A = -\beta B \quad (6.2-54b)$$

表明 HE 模的 A 、 B 符号相反，芯区的场分量可整理为

$$E_r = -i \frac{a}{U} \frac{\beta A}{J_m(U)} J_{m-1}(Ur/a) \sin m\varphi \quad (6.2-55a)$$

$$E_\varphi = -i \frac{a}{U} \frac{\beta A}{J_m(U)} J_{m-1}(Ur/a) \cos m\varphi \quad (6.2-55b)$$

$$E_z = \frac{A}{J_m(U)} J_m(Ur/a) \sin m\varphi \quad (6.2-55c)$$

$$H_r = -i \frac{a}{U} \frac{\beta B}{J_m(U)} J_{m-1}(Ur/a) \cos m\varphi \quad (6.2-55d)$$

$$H_\varphi = i \frac{a}{U} \frac{\beta B}{J_m(U)} J_{m-1}(Ur/a) \sin m\varphi \quad (6.2-55e)$$

$$H_z = \frac{B}{J_m(U)} J_m(Ur/a) \cos m\varphi \quad (6.2-55f)$$

同样，包层区域的各场分量，用 K 、 W 做相应替换即可。

这样，得到各类模式的全部 6 个场分量在光纤内部的分布形式，根据场分量表达式可画出各模式的场型图。计算场型很烦琐，图 6.9 和图 6.10 分别为几个低阶的 HE 模和 EH 模在芯区横截面内的电场强度矢量示意图，同时给出了 HE_{11} 模和 HE_{21} 模的三维场型。由于包层内的场分量随 r 的增大而单调地趋于零，因此包层场线的密度随 r 的增大而减小。

角向函数通常有两种选择方式，所以每种模式对应有两种场型：一种是电场 z 分量的角函数取 $\sin m\varphi$ ，磁场 z 分量取 $\cos m\varphi$ 时得到的；另一种是电场 z 分量的角函数取 $\cos m\varphi$ ，而磁场 z 分量取 $\sin m\varphi$ 的情况下得到的，图中模式上角标带撇号的场型即是后一种情况。由于各模式的电场线和磁场线是根据电场强度和磁场强度的所有分量的矢量和得到的，所以总场与某一个场分量的分布规律可能不完全一致，如角方向上，矢量场可能不按 $\sin m\varphi$ 或 $\cos m\varphi$ 的形式变化， HE_{11} 模就属此种情况。 m 相同而 n 不同时，不同模式的电场线或磁场线的曲线形状是类似的，但沿 r 方向的疏密分布状况是不同的， n 表示场量在径向出现极大值的个数。

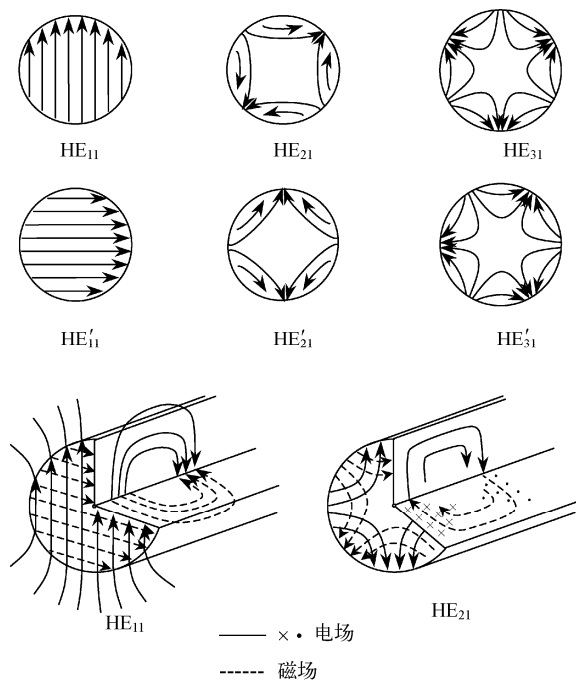


图 6.9 HE 模场型图

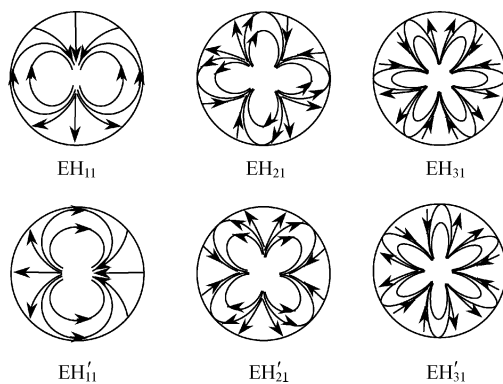


图 6.10 EH 模场型图

6.3 光纤的线偏振模

6.3.1 场的直角分量与场方程的标量解法

弱导光纤的 Δ 通常为 $10^{-2} \sim 10^{-3}$ ，远远小于 1。由于 $n_2 K_0 < \beta < n_1 K_0$ ，因而 $\beta \approx n_1 K_0$ 。从几何角度 $\beta = n_1 K_0 \cos \theta$ ，所以 $\cos \theta \approx 1$ ，一般 $\theta < 5^\circ$ 。可见光线为近似直线传播的平面波。由前面各模式场分量的表达式可知，横场分量 E_ϕ 、 E_r 与纵场分量 E_z 相比含有倍数因子 $a\beta/U$ ，因而横场与纵场的幅度之比为

$$\frac{E_t}{E_z} = \frac{a\beta}{U} = \frac{\beta}{\sqrt{n_1^2 K_0^2 - \beta^2}} \approx \frac{n_1}{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\Delta}}$$

可以认为 $|E_t|/|E_z| \gg 1$ 。磁场的横、纵分量也有同样的关系， $|H_t|/|H_z| \gg 1$ 。说明场的 z 向分量总是很小的，所以弱导光纤中的光波可以作为准 TEM 波处理。从分量表达式中还可发现，横向电场 E_t 和横向磁场 H_t 之间存在特定的关系

$$\frac{E_t}{H_t} = \frac{A}{B} = \frac{\omega\mu}{\beta} \approx \frac{\omega\mu}{K_0 n_1} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{1}{n_1} = \frac{Z_0}{n_1}$$

其中 Z_0 为真空波阻抗，这一结果与平面电磁波的特性一致。因此可以按平面波方式，继续用电磁场的直角分量描述光纤中场的偏振特性。这种情形下的平面波，不管是水平偏振还是垂直偏振，其电场与磁场几乎与 z 轴垂直，无论是子午线还是偏斜光线，全反射不影响场的偏振状态，所以传播过程中场始终保持其偏振状态不变，称为线偏振模 (Linear Polarized mode)，简称 LP 模。这样，总可以选取一个直角坐标系，使 LP 模场矢量与坐标轴方向一致，从而使问题得到简化，结果更加清晰。

这种线偏振模体系的处理方法有两种，一种是直接利用前面 Helmholtz 方程矢量解法的结果，只考虑横向场，做如下线性变换：

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_r \\ E_\varphi \end{bmatrix} \quad (6.3-1a)$$

$$\begin{bmatrix} H_x \\ H_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_r \\ H_\varphi \end{bmatrix} \quad (6.3-1b)$$

即可得到电磁场横向分量的直角坐标表示。各类模式的变换结果如下：

● TE_{0n} 模的横向电磁场

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = A_1 J_1(Ur/a) \begin{bmatrix} \sin \varphi \\ -\cos \varphi \end{bmatrix} \quad (6.3-2a)$$

$$\begin{bmatrix} H_x \\ H_y \end{bmatrix} = B_1 J_1(Ur/a) \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix} \quad (6.3-2b)$$

其中， $A_1 = i \frac{a}{U} \frac{\omega\mu B}{J_0(U)}$ ， $B_1 = i \frac{a}{U} \frac{\beta B}{J_0(U)}$ 。包层电磁场的角向函数与芯区相同，径向函数为 $K_1(Wr/a)$ 。其余各类模相似，只列出芯内横向电场的表达式。

● TM_{0n} 模

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = A_1 J_1(Ur/a) \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix} \quad (6.3-3)$$

● EH_{mn} 模

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = A_{m+1} J_{m+1}(Ur/a) \begin{bmatrix} \sin(m+1)\varphi \\ -\cos(m+1)\varphi \end{bmatrix} \quad (6.3-4)$$

其中， $A_{m+1} = i a \beta A / U J_m(U)$ ，模参量 $U_{mn} \in (u_{m,n}, u_{m+1,n})$ 。

● HE_{mn} 模

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = -A'_{m-1} J_{m-1}(Ur/a) \begin{bmatrix} \sin(m-1)\varphi \\ \cos(m-1)\varphi \end{bmatrix} \quad (6.3-5)$$

$A'_{m-1} = i a \beta A / U J_m(U)$ ，模参量 $U_{mn} \in (u_{m-2,n}, u_{m-1,n})$ 。

分析线偏振模体系的另一种方法是一开始就采用 Helmholtz 方程的近似解法——标量法。基于弱导时电磁波特性的分析，可以近似地认为横向电场和磁场的 x 或 y 分量都满足标量 Helmholtz 方程。选取横向电场的偏振方向沿 y 轴方向，它满足的标量 Helmholtz 方程为

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} E_y \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} E_y + (n^2 K_0^2 - \beta^2) E_y = 0 \quad (6.3-6)$$

采用圆柱坐标是为了便于应用边界条件。该方程的求解过程与矢量法求解纵向分量的过程完全一致，结果在形式上也完全相同，即

$$E_{y1} = \frac{A}{J_m(U)} J_m(Ur/a) \cos m\varphi e^{-i\beta z} \quad (r < a) \quad (6.3-7a)$$

$$E_{y2} = \frac{A}{K_m(W)} K_m(Wr/a) \cos m\varphi e^{-i\beta z} \quad (r > a) \quad (6.3-7b)$$

电场只有 E_y 分量时，横向磁场只包含 H_x 分量，可根据 E_y 直接写出

$$H_{x1} = -\frac{An_1}{Z_0 J_m(U)} J_m(Ur/a) \cos m\varphi e^{-i\beta z} \quad (r < a) \quad (6.3-8a)$$

$$H_{x2} = -\frac{An_2}{Z_0 K_m(W)} K_m(Wr/a) \cos m\varphi e^{-i\beta z} \quad (r > a) \quad (6.3-8b)$$

式中的负号是为了保证 $\vec{E} \times \vec{H}$ 的方向沿 z 轴正向，从而与传播因子 $e^{-i\beta z}$ 一致。

利用 Maxwell 方程的分量式，纵向场分量 E_z 、 H_z 与横向场分量 E_y 、 H_x 的关系为

$$E_z = \frac{i}{\omega\epsilon} \frac{\partial}{\partial y} H_x = \frac{iZ_0}{n^2 K_0} \frac{\partial}{\partial y} H_x$$

$$H_z = \frac{i}{\omega\mu} \frac{\partial}{\partial x} E_y = \frac{i}{K_0 Z_0} \frac{\partial}{\partial x} E_y$$

将式 (6.3-7) 和式 (6.3-8) 代入，得

$$E_{z1} = \frac{iAU}{2aK_0 n_1 J_m(U)} [J_{m+1}(Ur/a) \sin(m+1)\varphi + J_{m-1}(Ur/a) \sin(m-1)\varphi] \quad (r < a) \quad (6.3-9a)$$

$$E_{z2} = \frac{iAW}{2aK_0 n_2 K_m(W)} [K_{m+1}(Wr/a) \sin(m+1)\varphi - K_{m-1}(Wr/a) \sin(m-1)\varphi] \quad (r > a) \quad (6.3-9b)$$

$$H_{z1} = -\frac{iAU}{2aK_0 Z_0 J_m(U)} [J_{m+1}(Ur/a) \cos(m+1)\varphi - J_{m-1}(Ur/a) \cos(m-1)\varphi] \quad (r < a) \quad (6.3-10a)$$

$$H_{z2} = -\frac{iAW}{2aK_0 Z_0 K_m(W)} [K_{m+1}(Wr/a) \cos(m+1)\varphi + K_{m-1}(Wr/a) \cos(m-1)\varphi] \quad (r > a) \quad (6.3-10b)$$

注意，推导过程中用到了 Bessel 函数的递推公式及如下柱坐标与直角坐标的变换关系

$$r^2 = x^2 + y^2; \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \cos \varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\sin \varphi}{r}; \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin \varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\cos \varphi}{r}$$

对弱导光纤，这种求解标量波动方程所得到的电磁场的近似解析解是相当精确的，需要根据这些解进一步分析光纤中光波的特性。

6.3.2 线偏振模及简并度

根据直角坐标系下线偏振 (LP) 模场分量的表示式 (6.3-7) ~ (6.3-9)，由边界条件

$$E_{z1}|_{r=a} = E_{z2}|_{r=a}, \quad \text{得}$$

$$\begin{aligned} & \frac{U}{n_1 J_m(U)} [J_{m+1}(U) \sin(m+1)\varphi + J_{m-1}(U) \sin(m-1)\varphi] \\ &= \frac{W}{n_2 K_m(W)} [K_{m+1}(W) \sin(m+1)\varphi - K_{m-1}(W) \sin(m-1)\varphi] \end{aligned}$$

考虑到 $n_1 \approx n_2$ ，从上式可获得两个等式

$$\frac{UJ_{m+1}(U)}{J_m(U)} = \frac{WK_{m+1}(W)}{K_m(W)} \quad (6.3-11a)$$

$$\frac{UJ_{m-1}(U)}{J_m(U)} = -\frac{WK_{m-1}(W)}{K_m(W)} \quad (6.3-11b)$$

利用 Bessel 函数递推公式，容易证明这两个方程是等价的(见附录 B)，这就是弱导光纤标量解的特征方程，即线偏振模的特征方程。对其求解得出 U 或 W ，进而确定 W 或 U 及 β ，从而确定光纤中线偏振模的场分布。对于确定的 m 值，特征方程式(6.3-11)会有一系列满足导模条件的解，记作 U_{mn} ，一组 m 和 n 对应着一个确定的场分布和传播特性，就是光纤中的一个线偏振模式，记作 LP_{mn} 模，也称为标量模。

方程式(6.3-11a)的左边依然是一个多支函数，右边为单调函数，关于此类特征方程的图像求解和特征值 U_{mn} 的截止限和远离截止限分析，6.2.4 节已做了详细说明，这里只给出结果。 LP_{mn} 模的模参量 U_{mn} 一定满足 $u_{m-1,n} < U_{mn} < u_{mn}$ ，即截止限 $U_{mnc} = u_{m-1,n}$ ，远离截止限 $U_{mnf} = u_{mn}$ ，从而可知归一化频率截止限 $V_c = u_{m-1,n}$ 。

根据特征方程可求得光波在确定光纤结构下，各 LP_{mn} 模的传播常数 β 。为使得对所有的阶跃光纤都适用，我们仍采用归一化传播常数 B 与归一化频率 V 表示法，图 6.11 示出了 B 与 V 的关系曲线，即光纤的线偏振模的色散曲线。弱导条件下，由于一些矢量模简并， LP_{mn} 模的色散曲线与图 6.7 所示的各矢量模的色散曲线相比，模式少了很多。

LP_{mn} 模的径向函数为 $J_m(Ur/a)$ ，电场沿 y 向偏振时， E_y 的角向分布函数既可以选 $\cos m\varphi$ ，也可以选 $\sin m\varphi$ 。实际上还存在 x 方向偏振的模场 E_x ，角向函数也有 $\cos m\varphi$ 和 $\sin m\varphi$ 两种选择。所以一个 LP_{mn} 模有四种可能的线偏振场模式(见表 6.4)，是四度简并的。

特别的，当 $m=0$ 时， $\cos m\varphi=1$ ， $\sin m\varphi=0$ ，所以， LP_{0n} 模的场分布与 φ 无关，横向场径向函数为 $J_0(Ur/a)$ ，有两种互相正交的线偏振模式，是二度简并的，即

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = A_0 J_0(Ur/a) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{或} \quad \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = A_0 J_0(Ur/a) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

由于 $J_{-1}(U) = -J_1(U)$ ，所以 $m=0$ 时， $u_{m-1,n} = u_{1,n}$ ， $u_{mn} = u_{0n}$ 。此处比较特殊，需要将零根计入一阶 Bessel 函数的零点中，所以 LP_{0n} 模特征值或模参量范围为 $U \in (u_{1,n-1}, u_{0n})$ ($n \geq 1$)。最低阶的 LP_{01} 模， $U \in (0, u_{01})$ ，即归一化截止频率 $V_c=0$ ，此模不存在截止态，是光纤的主模或基模。

LP_{mn} 模中的 m 是模式横向场表示式中 Bessel 函数的阶数，它也反映了场量沿角向的分布规律， n 反映的是场量沿径向取极值的个数。

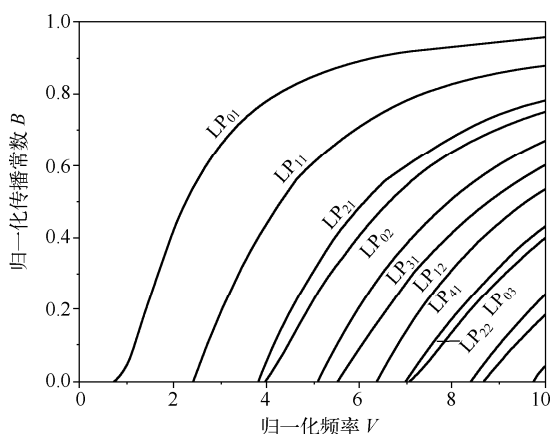


图 6.11 阶跃光纤 LP_{mn} 模的色散曲线

表 6.4 LP_{mn} 模的四种线偏振场模式

场分量	$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix}$			
径向函数	$J_m(Ur/a)$			
角向函数	$\begin{bmatrix} \cos m\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \sin m\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ \sin m\varphi \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ \cos m\varphi \end{bmatrix}$
偏振方向	x	x	y	y

对于弱导光纤，这样建立起来的线偏振模体系，是方便实验观察的。相比之下，前面 6.2 节中介绍的四种模式属严格理论求解的矢量模，由于多模简并，难与实验观察的结果相对应。

6.3.3 LP_{mn} 模的矢量模组成

LP_{mn} 模是弱导近似下根据场的标量解进行命名的，即其横向场的径向分布为 m 阶 Bessel 函数 $J_m(Ur/a)$ ，角向分布函数为 $\cos m\varphi$ 或 $\sin m\varphi$ 。这时可以用一个统一的特征方程式 (6.3-11) 来表示不同类的矢量模式 (TE, TM, EH, HE 模)。各类矢量模式的具体电磁场结构并不重要，而传播常数相同的那些模式则不论其电磁场结构如何都统一归并为一类模，这就是线偏振模的概念。根据式 (6.3-2) ~ 式 (6.3-5) 表示的矢量模的场直角分量的分布规律及各矢量模特征方程的特点，对全部矢量模式按照线偏振模的命名规则进行归并重组，可以得到线偏振模与矢量模的关系。

由式 (6.3-5) 可知， LP_{0n} 模刚好对应向量模的 HE_{1n} 模，两模的特征方程相同，自然模参量 U 有相同的取值范围 $U \in (u_{1,n-1}, u_{0n})$ 。

LP_{1n} 模的径向函数为 $J_1(Ur/a)$ ，由式 (6.3-2) ~ 式 (6.3-5) 可知，横向场分量的径向函数为 $J_1(Ur/a)$ 的矢量模有 TE_{0n} 、 TM_{0n} 和 HE_{2n} ，这三个矢量模的模参量 U 的取值范围与 LP_{1n} 模的相同，为 $U \in (u_{0n}, u_{1n})$ 。可以认为， LP_{1n} 模是由这三个矢量模叠加构成的。三个矢量模的径向函数相同，角向函数重写如下

$$TE_{0n} \text{ 和 } TM_{0n} \text{ 模分别为 } \begin{bmatrix} \sin \varphi \\ -\cos \varphi \end{bmatrix} \text{ 和 } \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix}$$

HE_{2n} 模有两种选取方式，设为 HE_{2n} 和 HE'_{2n} ，分别为

$$\begin{bmatrix} \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{bmatrix} \text{ 和 } \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{bmatrix}$$

由此得到的 LP_{1n} 模同样有四种角向模式。角向模具有可叠加性，满足叠加原理，四种矢量模式按表 6.5 叠加就可构成 LP_{1n} 模的四种线偏振状态。

表 6.5 中的四种角向分布所对应的模式称作 LP_{11} 模的线偏振基模，其场型图如图 6.12 所示。

表 6.5 LP_{1n} 模的矢量模叠加

$TE_{0n} + HE_{2n}$	$TM_{0n} + HE'_{2n}$	$TE_{0n} - HE_{2n}$	$TM_{0n} - HE'_{2n}$
$\begin{bmatrix} \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ \cos \varphi \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ \sin \varphi \end{bmatrix}$
x 偏振	x 偏振	y 偏振	y 偏振

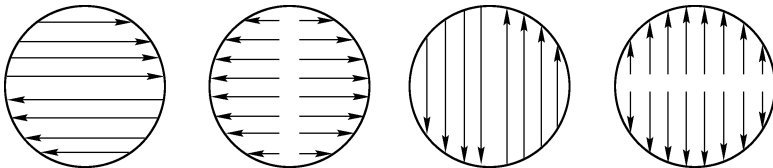


图 6.12 LP_{11} 模的四种线偏振基模

依此类推, LP_{mn} 模的径向函数为 $J_m(Ur/a)$, 由矢量模的横向场分布可知, 该模是由 $EH_{m-1,n}$ 模和 $HE_{m+1,n}$ 模两组矢量模组成的。两组矢量模的特征值范围相同, 都是 $U \in (u_{m-1,n}, u_{m,n})$, 也与 LP_{mn} 模的相同。两组矢量模的横向场角函数有四种

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \sin m\varphi \\ -\cos m\varphi \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \cos m\varphi \\ -\sin m\varphi \end{bmatrix}$$

通过叠加可建立如表 6.4 所示的 LP_{mn} 模的 4 种偏振模式。所以, 通过叠加那些具有相等传播常数的矢量模式, 就可以构成更有实际意义的线偏振模。

表 6.6 列出了光纤中的 9 个线偏振模, 并给出了其矢量模的组成。属于相同 LP 模的那些矢量模式, 其横向电磁场分布 (E_x 或 E_y) 是相同的。须注意的是, LP 模的概念仅在弱导条件下才有意义, 当相对折射率差 Δ 不满足弱导近似条件时, 各简并模分离, 简并消除 (参见图 6.7 和图 6.11)。

在矢量解法中, 基模是 HE_{11} 模, 其归一化截止频率 $V_c=0$, 与标量解法中的 LP_{01} 相对应。单模光纤的工作模式是 HE_{11} 模, 也就是 LP_{01} 模, 两种解法得出的单模传输的条件相同, 都是 $V < 2.405$ 。

表 6.6 线偏振模与矢量模

线偏振模 LP_{mn}	矢 量 模	特征值 U 的范围 $u_{1,n-1} \sim u_{0n} (m=0)$ $u_{m-1,n} \sim u_{mn} (m \geq 1)$	简并度
LP_{01}	HE_{11}	$0 \sim 2.4048$	2
LP_{11}	$TE_{01} TM_{01} HE_{21}$	$2.4048 \sim 3.8317$	4
LP_{21}	$EH_{11} HE_{31}$	$3.8317 \sim 5.1356$	4
LP_{02}	HE_{12}	$3.8317 \sim 5.5201$	2
LP_{31}	$EH_{21} HE_{41}$	$5.1356 \sim 6.3802$	4
LP_{12}	$TE_{02} TM_{02} HE_{22}$	$5.5201 \sim 7.0156$	4
LP_{41}	$EH_{31} HE_{51}$	$6.3802 \sim 7.5883$	4
LP_{22}	$EH_{12} HE_{32}$	$7.0156 \sim 8.4172$	4
LP_{03}	HE_{13}	$7.0156 \sim 8.6537$	2

6.3.4 LP 模光强和功率

首先讨论光纤中光强的分布问题。前面已经分析过, 波导截面内的光强分布为坡印亭矢量 $\vec{S} = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E} \times \vec{H}^*)$ 的 z 分量大小, 所以光强为

$$I = \frac{1}{2} (E_x H_y^* - E_y H_x^*)$$

选取矢量模式中的一种角向模式, 设芯层内的电场为

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = A_m J_m(Ur/a) \begin{bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{bmatrix}$$

令 $A_m = A \frac{1}{J_m(U)}$, 则

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = A \frac{J_m(Ur/a)}{J_m(U)} \begin{bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{bmatrix} \quad (6.3-12)$$

对于准平面波, 因为 $E/H = Z_0/n$, 且 \vec{E}_t 与 \vec{H}_t 正交, 有 $E_x H_x + E_y H_y = 0$, 可得磁场分量为

$$\begin{bmatrix} H_x \\ H_y \end{bmatrix} = \frac{n}{Z_0} A \frac{J_m(Ur/a)}{J_m(U)} \begin{bmatrix} -\sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{bmatrix} \quad (6.3-13)$$

从而得到芯层内的光强为

$$I_1 = \frac{n_1}{2Z_0} A^2 \frac{J_m^2(Ur/a)}{J_m^2(U)} \quad (6.3-14)$$

包层中的场只需将 J 替换为 K , U 替换为 W 即可, 所以包层内的光强为

$$I_2 = \frac{n_2}{2Z_0} A^2 \frac{K_m^2(Wr/a)}{K_m^2(W)} \quad (6.3-15)$$

这种矢量模场的光强分布与 φ 无关，各向同性，基模为中心亮斑，高阶模为环形结构。

由于矢量模式的可叠加性，计算光纤中传输的线偏振模的能量情况具有实际意义。以 x 偏振基模为例，芯层和包层的电磁场分布分别为

$$E_x = A \cos m\varphi \begin{cases} \frac{J_m(Ur/a)}{J_m(U)} & (r < a) \\ \frac{K_m(Wr/a)}{K_m(W)} & (r > a) \end{cases} \quad (6.3-16)$$

$$H_y = \frac{A}{Z_0} \cos m\varphi \begin{cases} \frac{n_1 J_m(Ur/a)}{J_m(U)} & (r < a) \\ \frac{n_2 K_m(Wr/a)}{K_m(W)} & (r > a) \end{cases} \quad (6.3-17)$$

这样线偏振模的光强分布为

$$I = \frac{A^2}{2Z_0} \cos^2 m\varphi \begin{cases} \frac{n_1^2 J_m^2(Ur/a)}{J_m^2(U)} & (r < a) \\ \frac{n_2^2 K_m^2(Wr/a)}{K_m^2(W)} & (r > a) \end{cases} \quad (6.3-18)$$

可见，光强在角向按 $\cos^2 m\varphi$ 或 $\sin^2 m\varphi$ 规律分布，在径向，纤芯内按 $J_m^2(Ur/a)$ 分布，包层中按 $K_m^2(Wr/a)$ 分布。由上面的光强公式就可以确定 LP_{mn} 模的单个偏振基模的光斑结构。径向分布函数 $J_m^2(Ur/a)$ 的零点线在光斑中表现为环形暗线，暗环线数目为 $n-1$ 条。角向分布函数 $\cos^2 m\varphi$ 的零点线表现为过圆心的直的暗线，暗直线数目为 m 条。暗环线和暗直线分割的亮斑数为 $(2m + \delta_{m,0})n$ 。几个低阶线偏振模的光斑如图 6.13 所示。

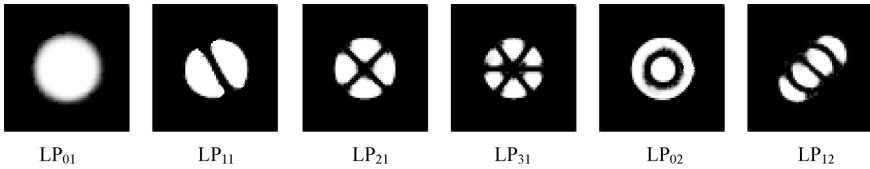


图 6.13 LP 模的偏振基模光斑图像

将纤芯和包层中的 LP_{mn} 模光强分布分别在各自的截面上积分，可得到 LP_{mn} 模在芯区和包层中传输的功率 P_1 和 P_2 ①，分别为

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{n_1^2 A^2}{2Z_0 J_m^2(U)} \int_0^a J_m^2(Ur/a) r dr \int_0^{2\pi} \cos^2 m\varphi d\varphi \\ &= \frac{\pi \delta n_1 A^2}{2Z_0 J_m^2(U)} \frac{a^2}{U^2} \int_0^U J_m^2(X) X dX \\ &= \frac{\pi \delta n_1 A^2}{2Z_0 J_m^2(U)} \frac{a^2}{U^2} \frac{U^2}{2} [J_m^2(U) - J_{m-1}(U) J_{m+1}(U)] \\ &= \frac{\pi \delta n_1 a^2}{4Z_0} A^2 \left[1 - \frac{J_{m-1}(U) J_{m+1}(U)}{J_m^2(U)} \right] \end{aligned} \quad (6.3-19)$$

① 积分公式 $\int_0^x x J_m^2(x) dx = \frac{x^2}{2} [J_m^2(x) - J_{m-1}(x) J_{m+1}(x)]$; $\int_x^\infty x K_m^2(x) dx = \frac{x^2}{2} [K_{m-1}(x) K_{m+1}(x) - K_m^2(x)]$

$$P_2 = \frac{\pi \delta n_2 a^2}{4Z_0} A^2 \left[\frac{K_{m-1}(W)K_{m+1}(W)}{K_m^2(W)} - 1 \right] \quad (6.3-20)$$

其中, $m=0$ 时, $\delta=2$; $m \neq 0$ 时, $\delta=1$ 。光纤中传输的 LP_{mn} 模式总功率为

$$P_t = P_1 + P_2 \quad (6.3-21)$$

为了描述能量在光纤芯内的集中程度, 引入一个物理量——功率因子, 定义为光纤芯内传输的功率 P_1 与模式总功率 P_t 之比, 功率因子与模式有关, 记作 η_{mn} 。忽略纤芯和包层的相对折射率差, 令 $n_1 \approx n_2 \approx n$, 则

$$\eta_{mn} = \frac{P_1}{P_1 + P_2} = \frac{1 - J_{m-1}(U)J_{m+1}(U)/J_m^2(U)}{K_{m-1}(W)K_{m+1}(W)/K_m^2(W) - J_{m-1}(U)J_{m+1}(U)/J_m^2(U)} \quad (6.3-22)$$

利用 LP 模特征方程式 (6.3-11a) 和式 (6.3-11b), 上式简化为

$$\eta_{mn} = \frac{W^2}{V^2} + \frac{U^2}{V^2} \frac{K_m^2(W)}{K_{m-1}(W)K_{m+1}(W)} = \frac{W^2}{V^2} \left[1 - \frac{J_m^2(U)}{J_{m-1}(U)J_{m+1}(U)} \right] \quad (6.3-23)$$

对于远离截止状态的模, $U \rightarrow 0$, $W \rightarrow V \gg 1$, 有

$$\frac{K_m^2(W)}{K_{m-1}(W)K_{m+1}(W)} \rightarrow 1; \quad \frac{J_m^2(U)}{J_{m-1}(U)J_{m+1}(U)} \rightarrow 0$$

因此 $\eta_{mn} \rightarrow 1$ (6.3-24)

说明此时模功率集中在纤芯中传输。

对近截止状态的模, $W \rightarrow 0$, $U \rightarrow V$, 有

$$\eta_{mn} = \frac{K_m^2(W)}{K_{m-1}(W)K_{m+1}(W)} \quad (6.3-25)$$

此式有两种渐近行为, $m=0, 1$ 时, $\eta_{mn}=0$; $m \geq 2$ 时, $\eta_{mn}=1-1/m$ 。说明对于 LP_{0n} 模和 LP_{1n} 模, 接近截止状态时, 功率几乎完全转移到包层中传输, 但对 m 较大的高阶模, 即使在近截止状态, 仍有相当多的功率保留在纤芯中, m 越大, η_{mn} 越大, 保留在纤芯中的功率越多。图 6.14 示出了几个低阶模的功率因子随归一化频率 V 的变化曲线。

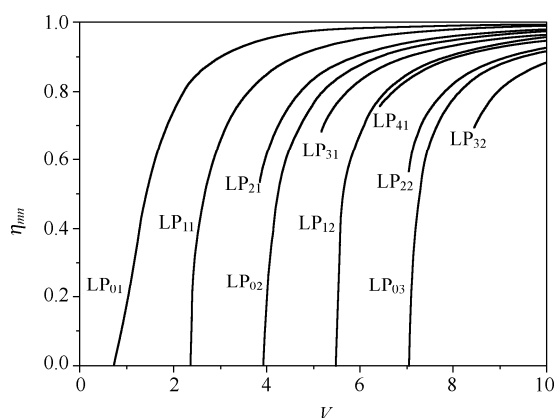


图 6.14 光纤 LP_{mn} 模的 η_{mn} - V 曲线

6.3.5 阶跃多模光纤的导模数量

对于确定的光纤和工作波长, 归一化频率 V 值确定了, 只要某导模的特征值截止限 $U_{mnc} < V$, 该模即可传输。 V 值越大, 可传输的导模数量越多。如给定设计参数 V , 当 $V \gg 1$ 时, 全部可以传输的导模数量是可以估算出来的。

根据 LP_{mn} 模的特征方程, 其特征值范围是 $u_{m-1,n} < U_{mn} < u_{mn}$, 所以 $U_{mnc} = u_{m-1,n}$ 。这样, 问题就归结为确定满足 $u_{m-1,n} < V$ 条件的 Bessel 函数的全部零点数目。 $u_{m-1,n}$ 是 $J_{m-1}(U)$ 的系列零点, 取 $J_{m-1}(U)$ 的渐近式

$$J_{m-1}(U) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi U}} \cos \left[U - \frac{\pi}{4} - (m-1) \frac{\pi}{2} \right]$$

函数为零时, 满足

$$u_{m-1,n} - \frac{\pi}{4} - (m-1) \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

令

$$u_{m-1,n} < V$$

得

$$m + 2n < \frac{2V}{\pi} - \frac{1}{2} \quad (6.3-26)$$

式中, m 和 n 为整数。小于 V 的 $u_{m-1,n}$ 的数目即是满足上述不等式的 m 、 n 的组合数目。 m 的最小值取 0 时, n 的最小值也可以取 0, 这时对应 LP_{01} 模的 $u_{10}=0$ 情况; $m=0$ 时, n 最大可取 V/π 。当 m 取其他值时, n 需从 1 开始取值, m 的最大值为 $2V/\pi-2$, n 的最大值为 $V/\pi-1$ 。所以, 式 (6.3-26) 使模式点阵 (m, n) 受到限制。近似的, 总点阵数目为

$$N = \sum_{m=0}^{2V/\pi-2} (V/\pi - m/2) \approx V^2/\pi^2 \quad (6.3-27)$$

考虑到 LP_{mn} 模一般是 4 重简并的, 因此, 光纤在确定的归一化参量 V 时的导模数量为

$$M = 4V^2/\pi^2 \quad (6.3-28)$$

可见它与 V 的平方成正比。这是估算阶跃式多模光纤中导模数量的一个粗略公式; 还可近似为 $M = V^2/2$ 。由 $V = aK_0\sqrt{n_1^2 - n_2^2}$ 可知, 光纤的芯半径越大, 相对折射率差越大, 传输光的波长越短, 光纤中传输的导模数量就越多。

6.4 梯度光纤模场分析

梯度光纤是指纤芯折射率沿径向渐变的光纤, 特点是具有较低的色散效应, 不同模式的传播速度十分接近, 有利于信号传输。通常, 梯度光纤的折射率分布可以表示为

$$n^2(r) = \begin{cases} n_1^2[1 - f(r)] & (r \leq a) \\ n_2^2 = n_1^2(1 - 2\Delta) & (r > a) \end{cases}$$

其中, n_1 为纤芯轴的折射率, n_2 为包层折射率, $\Delta = (n_1^2 - n_2^2)/2n_1^2$ 是相对折射率差, $f(r)$ 可以是各种形式的函数, 一般 $0 \leq f(r) \leq 1$ 。 $f(r)=0$, 代表均匀分布或阶跃分布; $f(r)$ 呈平方律分布, 代表折射率呈抛物型分布。本节利用波动理论讨论如下抛物型折射率分布的光纤的模式

$$n^2(r) = \begin{cases} n_1^2[1 - 2\Delta(r/a)^2] & (r \leq a) \\ n_2^2 = n_1^2(1 - 2\Delta) & (r > a) \end{cases} \quad (6.4-1)$$

这种分布下可以近似地得到解析解。

6.4.1 梯度光纤场方程及标量解

非均匀介质时的亥姆霍兹方程式 (1.5-4), 即

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{E} + n^2 K_0^2 \vec{E} + \nabla \left(\frac{\nabla \varepsilon_r}{\varepsilon_r} \cdot \vec{E} \right) &= 0 \\ \nabla^2 \vec{H} + n^2 K_0^2 \vec{H} + \frac{\nabla \varepsilon_r}{\varepsilon_r} \times \nabla \times \vec{H} &= 0 \end{aligned}$$

在弱导近似 $\Delta \ll 1$ 时, 方程中的第三项与前两项相比, 非常小, 可以忽略。因此方程简化为

$$\begin{aligned}\nabla^2 \vec{E} + K_0^2 n^2(\vec{r}) \vec{E} &= 0 \\ \nabla^2 \vec{H} + K_0^2 n^2(\vec{r}) \vec{H} &= 0\end{aligned}\quad (6.4-2)$$

设导模远离截止, 则模场能量几乎完全集中在芯区, 这时包层参数的变化对芯区的结果不会产生大的影响。那么, 分段的折射率分布式 (6.4-1), 在整个区域只用其中的第一个解析函数代替就可以, 即

$$n^2(r) = n_1^2[1 - 2\Delta(r/a)^2] \quad (0 \leq r < \infty) \quad (6.4-3)$$

这称作无界抛物型折射率分布近似。为分析方便, 这里先采用直角坐标系, 因为已经假设在无限区域中折射率都按上式分布, 所以不存在 $r=a$ 面上的边界条件。以 ψ 代表电磁场的任一横向分量, 则

$$\nabla^2 \psi + K_0^2 n_1^2(1 - 2\Delta r^2/a^2)\psi = 0 \quad (6.4-4)$$

仍采用分离变量法求解该 Helmholtz 方程。设

$$\psi(x, y, z) = X(x)Y(y)e^{-i\beta z} \quad (6.4-5)$$

可得
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi + (K_0^2 n_1^2 - \beta^2)\psi - \frac{2\Delta K_0^2 n_1^2(x^2 + y^2)}{a^2}\psi = 0 \quad (6.4-6)$$

由于 $V = aK_0\sqrt{n_1^2 - n_2^2} = aK_0n_1\sqrt{2\Delta}$, 做如下代换

$$s = a/\sqrt{V} \quad (6.4-7)$$

则式 (6.4-6) 简化为
$$\frac{\partial^2 X}{X \partial x^2} + \frac{\partial^2 Y}{Y \partial y^2} + K_0^2 n_1^2 - \beta^2 - \frac{x^2 + y^2}{s^4} = 0 \quad (6.4-8)$$

进一步分离变量, 得
$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \xi^2 X - \frac{x^2}{s^4} X = 0 \quad (6.4-9)$$

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + \zeta^2 Y - \frac{y^2}{s^4} Y = 0 \quad (6.4-10)$$

其中
$$K_0^2 n_1^2 - \beta^2 = \xi^2 + \zeta^2 \quad (6.4-11)$$

ξ 和 ζ 为待定的特征参数。上面两个微分方程的形式完全相同, 只需求解其中的一个。将式 (6.4-9) 改写为

$$s^2 \frac{d^2}{dx^2} X + s^2 \xi^2 X - \frac{x^2}{s^2} X = 0 \quad (6.4-12)$$

令 $x = st$, 并代入上式, 得

$$\frac{d^2}{dt^2} X + (s^2 \xi^2 - t^2) X = 0 \quad (6.4-13)$$

该方程称作 Weber 方程, 它与量子力学中一维线性谐振子的定态薛定谔方程形式相同。为使方程的解有限, 特征参数 ξ 必须满足

$$s^2 \xi^2 = 2m + 1 \quad (6.4-14)$$

这里 $m = 0, 1, 2, \dots$ 。方程式 (6.4-13) 的解是高斯-厄米函数, 即

$$X(t) = A e^{-t^2/2} H(t) \quad (6.4-15)$$

将其代回方程式 (6.4-13), 得

$$\frac{d^2 H}{dt^2} - 2t \frac{dH}{dt} + (s^2 \xi^2 - 1)H = 0 \quad (6.4-16)$$

由式 (6.4-14) 可知, 此方程就是标准的厄米方程

$$H_m''(t) - 2tH_m'(t) + 2mH_m(t) = 0$$

所以方程式 (6.4-9) 的解为 $X(x/s) = A_m e^{-\frac{x^2}{2s^2}} H_m(x/s)$ (6.4-17)

其中, H_m 是 m 阶厄米多项式

$$H_m(t) = (-1)^m e^{t^2} \frac{d^m}{dt^m} e^{-t^2} \quad (6.4-18)$$

几个低阶厄米多项式的具体表示式为

$$H_0(t) = 1, \quad H_1(t) = 2t, \quad H_2(t) = 4t^2 - 2, \quad H_3(t) = 8t^3 - 12t$$

同样解法, 可得 $Y(y/s) = B_n e^{-\frac{y^2}{2s^2}} H_n(y/s)$ (6.4-19)

并且特征参数 ζ 满足 $s^2 \zeta^2 = 2n + 1 \quad (n=0, 1, 2, \dots)$ (6.4-20)

因此, Helmholtz 方程式 (6.4-4) 的解为

$$\psi = C_{mn} e^{-\frac{r^2}{2s^2}} H_m(x/s) H_n(y/s) e^{-i\beta z} \quad (6.4-21)$$

其中, $C_{mn} = A_m B_n$ 是待定常数; 由 ξ 、 ζ 及式 (6.4-11) 可确定传播常数 β 。这就是抛物型折射率分布条件下, 光纤的模场分布函数, 呈高斯-厄米函数分布。 ψ 代表 E_x 或 E_y 偏振分量, 因而梯度光纤的模式属线偏振模体系, 用 LP_{mn} 表示。几个低阶模的场分布表示如下

● LP_{00} 模 $\psi_{00} = C_{00} e^{-\frac{r^2}{2s^2}}$ (6.4-22)

● LP_{10} 模 $\psi_{10} = C_{10} e^{-\frac{r^2}{2s^2}} 2 \frac{x}{s} = 2C_{10} e^{-\frac{r^2}{2s^2}} \frac{r}{s} \cos \varphi$

● LP_{20} 模 $\psi_{20} = 2C_{20} e^{-\frac{r^2}{2s^2}} \left(2 \frac{r^2}{s^2} \cos^2 \varphi - 1 \right)$

● LP_{11} 模 $\psi_{11} = 2C_{11} e^{-\frac{r^2}{2s^2}} \frac{r^2}{s^2} \sin 2\varphi$

● LP_{21} 模 $\psi_{21} = 4C_{21} e^{-\frac{r^2}{2s^2}} \left(2 \frac{r^2}{s^2} \cos^2 \varphi - 1 \right) \frac{r}{s} \sin \varphi$

厄米函数 $H_m(x/s)$ 和 $H_n(y/s)$ 是 m 次和 n 次多项式, 它们分别有 m 和 n 个根, 所以场量在角向和径向都具有振荡特性。在一定的 φ 角上, 上述几个模场沿 r 方向的变化规律如图 6.15(a) 所示; r 一定时, 模场沿角向的变化规律如图 6.15(b) 所示。

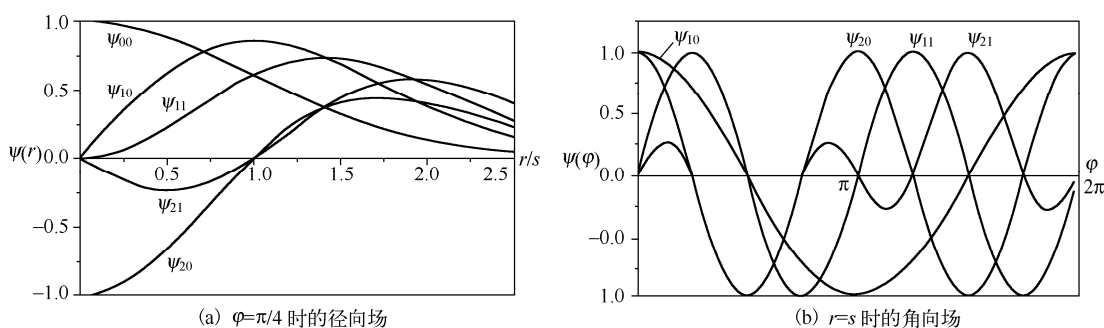


图 6.15 抛物线型折射率光纤的几个低阶模的场分布

最低阶的 LP_{00} 模是梯度光纤的主模或基模，模场是轴对称的，呈高斯型分布。光强为

$$I = I_0 e^{-r^2/s^2} \quad (6.4-23)$$

$\psi_{00}(s) = \psi_{00}(0)/\sqrt{e}$ ， $I(s) = I(0)/e$ ，即 $r = s$ 时，场幅下降至光纤轴处的 $1/\sqrt{e}$ ，光强下降至轴处的 $1/e$ 。定义 s 为 LP_{00} 模的模斑半径

$$s = \frac{a}{\sqrt{V}} = \sqrt{\frac{a}{\sqrt{2\Delta}K_0n_1}} = \sqrt{\frac{\lambda a}{2\pi n_1 \sqrt{2\Delta}}} \quad (6.4-24)$$

当 $r = \sqrt{2}s$ 时， $\psi_{00} = \psi_{00}(0)/e$ ，场量 E_x 或 E_y 的幅值下降至轴处的 $1/e$ 。定义模场半径为

$$w = \sqrt{2}s = a\sqrt{2/V} \quad (6.4-25)$$

模斑半径和模场半径均与波长和芯径的平方根成正比，与相对折射率差的四次方根成反比。

弱导条件下，光纤基模的电磁场分布相对比较简单，且对折射率的变化不敏感，所以折射率分布不均匀的光纤可等效为无界抛物型折射率分布光纤进行近似分析。实际单模光纤的场分布通常用式 (6.4-22) 的高斯分布来近似。其等效模场半径可通过实验的方法测量得到，从而可以很方便地确定光纤的激发效率、连接损耗、波导色散等。

6.4.2 传播常数

由式 (6.4-11)、式 (6.4-14) 及式 (6.4-20) 可知，光纤 LP_{mn} 模的传播常数满足

$$\beta^2 = n_1^2 K_0^2 - \xi^2 - \zeta^2 = n_1^2 K_0^2 - \frac{2m+1}{s^2} - \frac{2n+1}{s^2} \quad (6.4-26)$$

根据前面的替换式 (6.4-7)，即 $s^2 = a^2/V$ ，可得

$$\beta = \left[n_1^2 K_0^2 - \frac{2V}{a^2} (m+n+1) \right]^{1/2} \quad (6.4-27)$$

尽管前面分析中假设芯半径无限大，但实际的光纤都是有包层的，所以导波模式还是应满足 $n_2 K_0 < \beta < n_1 K_0$ ，则

$$\left[n_1^2 K_0^2 - \frac{2V}{a^2} (m+n+1) \right]^{1/2} > n_2 K_0 \quad (6.4-28)$$

根据 $V = aK_0 \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$ ，必有

$$2(m+n+1) < V \quad (6.4-29)$$

由此可知， LP_{mn} 模的归一化截止频率为

$$V_c = 2(m+n+1) \quad (6.4-30)$$

如前所述，折射率的近似处理只适用于远离截止状态，因此对截止状态的定量计算结果会有较大的偏差，这里的 V_c 只能做参考。以 LP_{00} 模为例， $V_c = 2$ ， $w = a\sqrt{2/V} = a$ ，说明当模场半径等于纤芯半径时，模趋于截止状态。

6.4.3 模式群和导模数量

根据式 (6.4-27)，在光纤的结构参数和工作波长确定的条件下，传输常数 β 仅仅由模序数 m 、 n 决定，或者说由 m 与 n 之和决定。令 $p = m+n$ ， $p=0, 1, 2, \dots$ ，则

$$\beta = \left[n_1^2 K_0^2 - \frac{2V}{a^2} (p+1) \right]^{1/2} \quad (6.4-31)$$

可见, 由不同 m 、 n 组合的 p 值相同的各模式具有相同的传播常数, 它们是一组简并模, 称作 p 模式群。对某一 p 值, m 和 n 有 $p+1$ 种组合, 所以, p 模式群有 LP_{0p} , $LP_{1,p-1}$, $LP_{2,p-2}$, \dots , $LP_{p-1,1}$, LP_{p0} 共计 $p+1$ 个模式。而其中的每一个模式都对应两种偏振状态, 横向电场强度可以在 x 方向, 也可以在 y 方向, 所以 p 模式群的简并度为 $2(p+1)$ 。

当光纤的归一化频率 V 一定时, 由式 (6.4-29) 可知, 导模的 p 值满足 $p < V/2 - 1$ 。因此, p 有一截止上限

$$p_{\max} = \text{int}(V/2 - 1) \quad (6.4-32)$$

int 表示取整。所以, 群序号在 $0 \sim p_{\max}$ 之间的所有模式数目, 为抛物型光纤中的总导模数目, 即

$$M = \sum_{p=0}^{p_{\max}} 2(p+1) = (p_{\max} + 1)(p_{\max} + 2) \approx \frac{V}{2} \left(\frac{V}{2} + 1 \right) \quad (6.4-33)$$

据此可由光纤的归一化频率 V , 对梯度光纤中传输的导模数量进行估算。

习题

6-1 基本概念: 弱导光纤, 单模光纤, 多模光纤, 光纤的归一化频率, 光纤的矢量模和标量模, 混合模, 线偏振模, 模式简并, 功率因子, p 模式群, 模场半径, 模斑半径。

6-2 试利用 $U^2 = a^2(n_1^2 K_0^2 - \beta^2)$ 和 $W^2 = a^2(\beta^2 - n_2^2 K_0^2)$, 由光纤导模特征方程式 (6.2-25) 推导出另一种表达形式 (式 (6.2-26))。

6-3 已知阶跃光纤中, $n_1=1.480$, $\Delta=0.002$, $a=4\mu\text{m}$, 当光波长分别为 $1.55\mu\text{m}$ 、 $1.31\mu\text{m}$ 、 $0.85\mu\text{m}$ 时, 光纤中分别可传输哪些导模?

6-4 若工作波长 λ 分别为 $0.85\mu\text{m}$ 、 $1.55\mu\text{m}$, 阶跃光纤 $2a$ 分别为 $50\mu\text{m}$ 、 $8\mu\text{m}$, 纤芯折射率为 1.5, 相对折射率差 Δ 为 0.01、0.001。试问何种是多模光纤, 何种是单模光纤? 多模光纤的模式数目各是多少?

6-5 光纤线偏振模式 LP_{mn} 与精确矢量解模式 TE_{0n} 、 TM_{0n} 、 EH_{mn} 、 HE_{mn} 之间有什么关系?

6-6 模式的本质是什么? 光纤中的基模能否被截止, 为什么? 在单模光纤中能否激励起 LP_{11} 模式?

6-7 已知 $a=4.8\mu\text{m}$, $\lambda=1.5\mu\text{m}$, $n_1=1.475$, $n_2=1.471$, 利用归一化的模色散曲线 (图 6.7 或图 6.11), 给出光纤中传输的模式及其传播常数 β 。

6-8 列表说明 TE_{0n} 、 TM_{0n} 、 EH_{mn} 、 HE_{mn} (分别考虑 $m=1$ 和 $m \geq 2$ 两种情况) 各模特征方程及特征值的截止限和远离截止限。

6-9 写出光纤线偏振模式 LP_{01} 、 LP_{02} 、 LP_{12} 、 LP_{31} 的相关信息, 包括特征方程、矢量模构成、模场的径向分布、模场的角向分布 (全部简并模式)、模参量 U 的截止限和远离截止限 (用数值表示)、归一化截止频率 V_c 及相应偏振基模的光斑图像。

6-10 设计阶跃式单模光纤。已知 $n_1=1.46$, 相对折射率差 $\Delta=0.003$, 传输波长分别为 $1.31\mu\text{m}$ 、 $1.55\mu\text{m}$ 。对应这两种波长的最大纤芯半径各是多少?

6-11 如果光纤参数为 $a=4\mu\text{m}$, $n_1=1.46$, $\Delta=5 \times 10^{-3}$, 分别求出 LP_{01} 模和 LP_{21} 模的截止波长。

6-12 根据阶跃光纤色散曲线，在 $V=6$ 时有哪几个模式存在？总模式数目是多少？与模式数目估算公式做一比较。

6-13 已知阶跃光纤纤芯的折射率 $n_1=1.54$ ，相对折射率差 $\Delta=0.01$ ，纤芯半径 $a=25\mu\text{m}$ ，若 $\lambda=1\mu\text{m}$ ，计算：（1）光纤的归一化频率；（2）传播的模式数量。

6-14 阶跃型光纤中， $n_1=1.54$ ， $\lambda=1.31\mu\text{m}$ 。（1）若 $\Delta=0.005$ ，当保证单模传输时，纤芯半径 a 应该取多大？（2）若光纤纤芯半径 $a=5\mu\text{m}$ ，保证单模传输时， Δ 应该如何选择？

第 7 章 电磁场分析的有限元法

光波导有固有的传播模式，对确定的波长，固有模式具有独立的传播常数和特定的场分布，设计波导器件时，知道波导模的特性是非常重要的。目前，分析条形或脊形光波导传播模式和场分布的方法中，Marcatili 近似、有效折射率法虽然可以近似解析求解，但这两种方法的条件和精度都很有限，如 Marcatili 近似只对矩形波导有效，且需要满足弱导近似条件，有效折射率法适于解决矩形截面的脊波导问题，对任意截面形状与复杂折射率分布的三维波导，要精确求得传播常数和电磁场分布，还要依赖于数值分析法。

电磁场分析的数值法有很多，如有限元法、有限差分法、模匹配法、横向共振法、WKB 法等，有限元法因有较高的精度和通用性，是目前最为广泛使用的、比较公认的精确数值技术方法之一，并作为各种近似计算的基准。有限元法特别适用于复杂的几何结构和介电特性分布，几乎可以解决任意截面和折射率分布的介质光波导的模式及场分布问题。

有限元方法是一种具有深厚数学理论、得到广泛应用、已发展成熟的数值计算方法。其数学理论包括泛函分析理论和抽象空间理论，应用范围包括土木工程(如桥梁、建筑)，机械制造(如船舶、飞机设计)，计算场分布(如应力场、流体场、电磁场)等。目前已有很多商品化软件，使用方便。

7.1 微分方程边值问题

7.1.1 边值问题

介绍有限元之前，首先说明一下微分方程的边值问题。因为空间电磁场的变化规律是由在特定边界条件下的麦克斯韦微分方程来描述的，分析电磁场，实际就是求解满足一定边界条件的微分方程。通常微分方程都可以表示为

$$L\phi = f \quad (7.1-1)$$

式中， L 是微分算符， ϕ 是未知函数， f 是激励或强加函数。例如，泊松 (Poisson) 方程 $\nabla^2\phi = -\rho$ ；亥姆霍兹方程 $(\nabla^2 + K^2)\vec{E} = 0$ 等。

设 Γ 为研究区域 Ω 的边界，一般的，微分方程边界条件有狄利克雷 (Dirichlet) 条件

$$\phi|_{\Gamma} = p \quad (7.1-2)$$

和诺曼 (Neumann) 条件

$$\frac{\partial}{\partial n}\phi|_{\Gamma} = q \quad (7.1-3)$$

此外，还有复杂的阻抗和辐射边界条件，甚至更复杂的高阶条件。

光波导中的电磁学问题可用下面的标量 Helmholtz 方程描述

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\phi + [n^2(\vec{r})K_0^2 - \beta^2]\phi = 0 \quad (7.1-4)$$

ϕ 代表电磁场的任一个直角分量，归结为二维问题，就是

$$(\nabla_t^2 + K_t^2)\phi = 0 \quad (7.1-5)$$

其中 $K_t^2 = n^2(\bar{r})K_0^2 - \beta^2$ ，如果光波导横向足够大，边界可以取为虚构边界，并设为零边界条件。

求解微分方程的边值问题往往是困难的，只有在较为特殊或近似的情形下才能直接得出解析形式的解。复杂的情况下，可采用间接的方法，常用的有里兹(Ritz)方法和伽辽金(Galerkin)方法。

7.1.2 Ritz 方法

里兹(Ritz)方法，也称变分法，它是将求解微分方程的边值问题转化为求解泛函的极值问题。

泛函是广义的函数，若对于某函数集 Y 中的每一个函数 $y(x)$ ，有一个数 $F \in R$ 与之对应，则称变量 F 为函数 $y(x)$ 的泛函，记作 $F = F[y(x)]$ 。简言之，泛函 F 是函数集 Y 至 R 上的一个映射，映射的自变元为一个函数，称为容许函数。例如，费马原理中，光程就是路径曲线函数的泛函。

上述泛函可推广到依赖于多个函数的泛函 $F = F[y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)]$ 或依赖于一个或 n 个多元函数的泛函 $F = F[y(x_1, x_2, \dots, x_n)]$ ， $F = F[y_1(x_1, x_2, \dots, x_n), y_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, y_n(x_1, x_2, \dots, x_n)]$ 。可以说，泛函是一个无限维函数空间内，函数集合的函数。在光波导问题中，泛函是电磁场分布对应的函数。

针对 Ω 域的微分方程及其边界条件

$$L\phi = f, \quad \phi|_r = 0 \quad (7.1-6)$$

建立一个泛函
$$F(\psi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (L\psi)\psi^* d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\psi f^* + \psi^* f) d\Omega \quad (7.1-7a)$$

可以简记作
$$F(\psi) = \frac{1}{2} \langle L\psi, \psi \rangle - \frac{1}{2} \langle \psi, f \rangle - \frac{1}{2} \langle f, \psi \rangle \quad (7.1-7b)$$

其中内积符号 $\langle \psi, \varphi \rangle = \int_{\Omega} \psi \varphi^* d\Omega$ 。关于这个泛函的建立，这里不做深层讨论。该泛函的变分为零时，泛函达到极值。下面证明，使泛函式(7.1-7)达到极值的函数(称为极值函数)就是方程式(7.1-6)的解。为此，对泛函进行变分运算

$$\delta F(\psi) = \frac{1}{2} \langle L\delta\psi, \psi \rangle + \frac{1}{2} \langle L\psi, \delta\psi \rangle - \frac{1}{2} \langle \delta\psi, f \rangle - \frac{1}{2} \langle f, \delta\psi \rangle$$

假设 L 是自伴算符(见附录 C)，因为光波导问题涉及的 ∇^2 和 $\nabla_t^2 + K_t^2$ 算符都是自伴的，从而

$$\delta F(\psi) = \frac{1}{2} \langle \delta\psi, L\psi \rangle + \frac{1}{2} \langle \delta\psi, L\psi \rangle^* - \frac{1}{2} \langle \delta\psi, f \rangle - \frac{1}{2} \langle \delta\psi, f \rangle^*$$

由此得到
$$\delta F = \text{Re} \langle \delta\psi, L\psi - f \rangle \quad (7.1-8)$$

Re 表示取实部。令 $\text{Re} \langle \delta\psi, L\psi - f \rangle = 0$ ，因为 $\delta\psi$ 是任意变分，所以， ψ 必须满足 $L\psi - f = 0$ ，可见， ψ 即是方程式(7.1-6)的解。这样，求解微分方程解的问题就转化成了变分问题。

对于光波导情况下的 Helmholtz 方程式(7.1-5)， $L = \nabla_t^2 + K_t^2$ ， $f = 0$ ，其中 ∇_t^2 ， K_t^2 都是自伴算符，方程对应的泛函为

$$F(\psi) = \frac{1}{2} \langle \nabla_t^2 \psi, \psi \rangle + \frac{1}{2} \langle K_t^2 \psi, \psi \rangle \quad (7.1-9)$$

由附录 C 的式(C-5)得
$$F(\psi) = -\frac{1}{2} \langle \nabla \psi, \nabla \psi \rangle + \frac{1}{2} \langle K_t^2 \psi, \psi \rangle \quad (7.1-10)$$

作为一种变分方法，里兹方法是先构造坐标函数序列，再通过求极值过程来获得变分问题的解。具体步骤如下：

首先, 选择一个适当的线性无关的坐标函数序列 ϕ_i , $\{\phi_i\}$ 可看作定义在全域上的一套基函数, 其选取是多种多样的, 例如选取 $1, x, x^2, x^3, \dots$, 或者 $\sin\pi x, \sin 2\pi x, \sin 3\pi x, \dots$ 。然后将容许函数 ψ 按基函数展开

$$\psi = \sum_{i=1}^N c_i \phi_i \quad (7.1-11)$$

c_i 为待定的展开系数, 将上式代入到式 (7.1-10) 中, 得到

$$F = \frac{1}{2} \sum_{i,j} c_i c_j \langle \nabla \phi_i, \nabla \phi_j \rangle - \frac{1}{2} \sum_{i,j} c_i c_j \langle K_t^2 \phi_i, \phi_j \rangle \quad (7.1-12)$$

$$\text{令} \quad K_{ij} = \langle \nabla \phi_i, \nabla \phi_j \rangle \quad (7.1-13)$$

$$s_{ij} = \langle K_t^2 \phi_i, \phi_j \rangle \quad (7.1-14)$$

$$\text{式 (7.1-12) 化为} \quad F(c_1, c_2, \dots, c_N) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} K_{ij} c_i c_j - \frac{1}{2} \sum_{i,j} s_{ij} c_i c_j \quad (7.1-15)$$

为了求 F 的极值, 令 $\partial F / \partial c_i = 0$, 从而得到

$$\sum_{j=1}^N (K_{ij} - s_{ij}) c_j = 0 \quad (7.1-16)$$

$i=1, 2, \dots, N$, 这是一个 N 维的代数方程组, N 是选取的基函数的数目, 也是未知量 c_i 的数目。至此, 变分问题又进一步简化为求解代数方程组问题。解上述方程组, 得出使泛函 F 达到极小的展开系数 c_i , 于是由式 (7.1-11) 得到微分方程式 (7.1-5) 的近似解 ψ 。

7.1.3 Galerkin 方法

伽辽金 (Galerkin) 方法是一种余数加权方法, 它通过对微分方程的余数和加权函数运算来得到方程的解。微分方程 $L\psi = f$, 即 $L\psi - f = 0$, ψ 为方程的严格解。设 $\tilde{\psi}$ 是方程的近似解, 则得到非零的余数 $r = L\tilde{\psi} - f$ 。 $\tilde{\psi}$ 的最佳近似应使余数 r 在 Ω 内所有点有最小值。余数加权方法要求

$$R = \int_{\Omega} w r d\Omega = 0 \quad (7.1-17)$$

其中 R 是余数加权积分, w 是所选择的加权函数, 严格的微分方程的解一定是上面积分方程的解。在微分方程不能严格求解的情况下, 希望求出 R 为零或者极小值的解, 这个解称为微分方程的弱解或近似解。

同样, 加权函数 w 有多种选取方法, 是任意的, 因此 R 可能得到不同的表示式。例如, 可以选取 $w = r$, 则余数加权积分为

$$R = \int_{\Omega} (L\tilde{\psi} - f)^2 d\Omega \quad (7.1-18)$$

此处 R 是正定的, 其极小值应接近零, 可以用最小二乘法求解。

如果选择展开函数 (基函数) 为加权函数, $w = \phi_i$, 对波导方程式 (7.1-5), 又可以转化为二维问题, 则余数加权积分为

$$R_i = \int_S \phi_i (\nabla_t^2 + K_t^2) \tilde{\psi} dS = 0 \quad (7.1-19)$$

S 为波导横截面。将 $\tilde{\psi}$ 按基函数展开

$$\tilde{\psi} = \sum_{j=1}^N c_j \phi_j \quad (7.1-20)$$

选择加权函数与近似解展开中所用的基函数相同, 可以得到最精确的解。因此

$$R_i = \sum_{j=1}^N c_j \int_S \phi_i (\nabla_i^2 + K_i^2) \phi_j dS = 0 \quad (7.1-21)$$

$i=1, 2, \dots, N$ ，其中 N 为基函数数目。同样令

$$K_{ij} = -\int_S \phi_i \nabla_i^2 \phi_j dS = \int_S \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j dS \quad (7.1-22)$$

$$s_{ij} = \int_S \phi_i K_i^2 \phi_j dS = \langle \phi_i, K_i^2 \phi_j \rangle \quad (7.1-23)$$

可得到和里兹方法相同的一个 N 维代数方程组

$$\sum_{j=1}^N (K_{ij} - s_{ij}) c_j = 0 \quad (7.1-24)$$

伽辽金方法，不要求算符 L 是自伴的。但如果算符是自伴的，在用基函数做加权函数的情况下，伽辽金方法与里兹方法得到的代数方程组则是相同的。

7.1.4 本征值方程

不论里兹方法还是伽辽金方法，只要选择合适的基函数或加权函数，都可以将求解电磁场的微分方程转化为求解如下代数方程组的解

$$\sum_{j=1}^N (K_{ij} - s_{ij}) c_j = 0$$

其中， $i=1, 2, \dots, N$ 。由式 (7.1-22) 可知， K_{ij} 由基函数决定，由式 (7.1-23)

$$s_{ij} = \int_S \phi_i (n^2 K_0^2 - \beta^2) \phi_j dS = \int_S \phi_i n^2 K_0^2 \phi_j dS - \int_S \phi_i \beta^2 \phi_j dS = A_{ij} - \beta^2 B_{ij} \quad (7.1-25)$$

$$\text{将代数方程组} \quad \sum_{j=1}^N (K_{ij} - A_{ij} + \beta^2 B_{ij}) c_j = 0 \quad (7.1-26)$$

$$\text{写成矩阵形式} \quad \mathbf{T}\mathbf{c} + \lambda \mathbf{B}\mathbf{c} = 0 \quad (7.1-27)$$

其中， $\mathbf{T} = \mathbf{K} - \mathbf{A}$ ， $T_{ij} = K_{ij} - A_{ij}$ ， $\lambda = \beta^2$ ，为未知的本征值。求出本征值 λ ，然后再解出系数 c_i ，即可得到确定模式的电磁场的分布

$$\psi = \sum_{i=1}^N c_i \phi_i$$

7.2 有限元分析

里兹方法和伽辽金方法中的展开函数由定义在全域上的一组基函数组成，在整个区域内找出能表示或至少近似表示问题真实解的基函数，是非常重要的步骤。然而对于许多问题，这一步是十分困难的。有限元方法是里兹法和伽辽金法的推广，它适用于广泛类型的偏微分方程。它选用“局部基函数”或“子域多项式”的方法，每个这样的函数在所考虑的区域中的大部分点上为零，只在一个特定节点领域的值需要计算。在这个领域内，所选函数由低次多项式组成，使计算尽可能简单，因而在很大程度上克服了里兹法和伽辽金法选取基函数的困难。为此，将整个区域划分成有限多的小子域，并应用定义在每个子域上的基函数。因为子域是小区域，因而在每个子域内，函数 ϕ_i 的变化不大，所以定义在子域上的这些基函数通常比较简单。

边值问题的有限元分析通常包括下列基本步骤：

- (1) 区域的离散或子域的划分；
- (2) 插值函数的选择；
- (3) 方程组的建立(用里兹变分方法或伽辽金方法得到)；

(4) 方程组的求解。

7.2.1 区域离散和单元划分

假设区域为 Ω 。将全域 Ω 分成许多小的子域，这些子域被称为单元。对于实际上是直线或曲线的一维区域，单元通常是短直线段，它们连接起来组成原来的线域，如图 7.1(a)所示。对于二维区域，单元通常是三角形或四边形，如图 7.1(b)所示。对于三维问题，区域可划分成四面体、三棱柱、六面体等，如图 7.1(c)所示。单元的顶点称为节点。

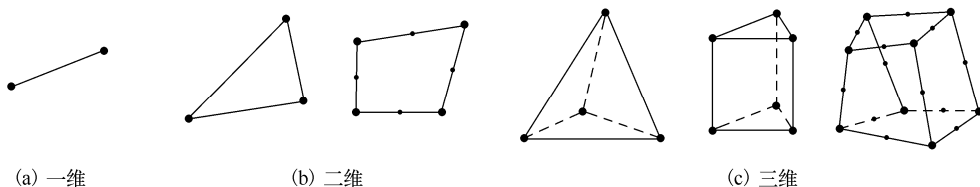


图 7.1 单元与节点

划分单元时应疏密适当，节点公用。单元分的越小，计算结果越精确，但计算量越大。一般对电磁场问题下，单元划分时需要注意以下几点：

(1) 不能有跨越介质分界面的单元。

(2) 多种介质按区域划分，依次对单元和节点进行连续编号。节点编号的好坏影响本征值方程中总刚度矩阵的宽度，要求所有相邻节点编号之差越小越好。

(3) 单元的边长比会影响到解的精度，尽量避免单元过于尖锐。单元边长最大尺寸与最小尺寸之比，尽可能接近 1，一般不超过 3:1，比值接近 1，解的质量好。

(4) 分割点、线、面应置于几何形状及介质特性发生突变之处，突变处单元要细分。

(5) 估计场变化急剧的区域也要做细分处理，变化较小的远处场域可粗略划分，以节省运算时间。

(6) 场域的对称部分，其单元的形态也应力求对称。

(7) 单元尺寸应不大于入射光波长的六分之一。

图 7.2 示出了对二维和三维区域进行单元网格划分的结果。

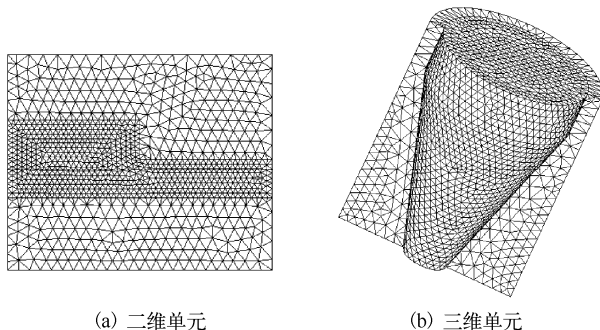


图 7.2 区域的有限元网格划分

7.2.2 线性插值函数与基函数

通常插值函数可选择为一阶(线性)、二阶(二次)或高阶多项式。高阶多项式的精度较高，但得到的公式较复杂，并增加了总体自由度，计算时增加了计算量和计算机的存储量。目前被广泛采用的仍然是简单且基本的线性插值函数，它易于掌握，便于计算，只要将单元细分，也

会获得很好的精度。

如图 7.3 所示, 以二维三角形单元为例, 设第 e 个单元 3 个节点的编号分别为 i 、 j 、 k , 坐标分别为 (x_i, y_i) 、 (x_j, y_j) 、 (x_k, y_k) 。设单元内的插值函数是线性的

$$\psi^e(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad (7.2-1)$$

并设单元 e 各节点处的解为 c_i 、 c_j 、 c_k (待定), 则

$$\begin{cases} c_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i \\ c_j = \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j \\ c_k = \alpha_1 + \alpha_2 x_k + \alpha_3 y_k \end{cases}$$

解出 α_1 、 α_2 、 α_3 , 代回到式 (7.2-1), 得

$$\psi^e(x, y) = (c_i \ c_j \ c_k) \begin{bmatrix} \phi_i^e \\ \phi_j^e \\ \phi_k^e \end{bmatrix} \quad (7.2-2)$$

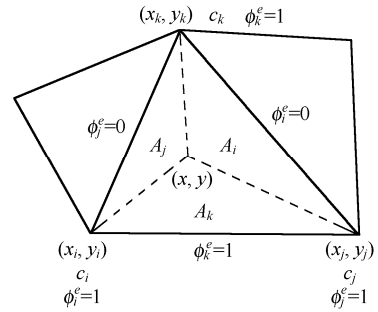


图 7.3 三角形单元 e 与基函数 ϕ_i^e

$$\text{其中} \quad \phi_i^e = \frac{1}{2A_e} \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \end{vmatrix}, \quad \phi_j^e = \frac{1}{2A_e} \begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x & y & 1 \\ x_k & y_k & 1 \end{vmatrix}, \quad \phi_k^e = \frac{1}{2A_e} \begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_j & y_j & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} \quad (7.2-3)$$

$$\text{式中} \quad A_e = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \end{vmatrix} \quad (7.2-4)$$

A_e 为三角形单元 e 的面积。由图 7.3 可知, ϕ_i^e 在三角形单元内任一点的函数值是两个三角形面积之比 A_j/A_e 。 ϕ_i^e 在第 i 个节点上的函数值为 1, 在邻近节点和对边上的函数值为 0, 并且在该节点所在的三角形单元内不为 0, 而在其余区域内均为 0。 ϕ_i^e 、 ϕ_j^e 、 ϕ_k^e 称为面积坐标下的基函数(或形函数), 与所划分单元的节点坐标有关, 显然 $\phi_i^e + \phi_j^e + \phi_k^e = 1$ 。

上述结果可以推广到三维的四面体单元。

7.2.3 单元方程的扩展——全局方程的建立

将式 (7.1-26) 应用于有 3 个基函数的三角形单元 e 中, 由于

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_i^e}{\partial x} &= \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \end{vmatrix} & \frac{\partial \phi_j^e}{\partial x} &= \frac{1}{D} \begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ x_k & y_k & 1 \end{vmatrix} & \frac{\partial \phi_k^e}{\partial x} &= \frac{1}{D} \begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_j & y_j & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \frac{\partial \phi_i^e}{\partial y} &= \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \end{vmatrix} & \frac{\partial \phi_j^e}{\partial y} &= \frac{1}{D} \begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_k & y_k & 1 \end{vmatrix} & \frac{\partial \phi_k^e}{\partial y} &= \frac{1}{D} \begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_j & y_j & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

其中 $D = 2A_e$ 。因此, 相应各单元矩阵元为^①

$$\begin{aligned} K_{ij}^e &= \int \nabla \phi_i^e \cdot \nabla \phi_j^e dS = \int_e \left(\frac{\partial \phi_i^e}{\partial x} \frac{\partial \phi_j^e}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i^e}{\partial y} \frac{\partial \phi_j^e}{\partial y} \right) dS \\ &= \frac{D}{2} \left(\frac{\partial \phi_i^e}{\partial x} \frac{\partial \phi_j^e}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i^e}{\partial y} \frac{\partial \phi_j^e}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (7.2-5)$$

① $\int_e \phi_i^l \phi_j^m \phi_k^n dx dy = \frac{D! l! m! n!}{(l+m+n+2)!}$

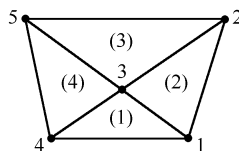
$$A_{ij}^e = \int_e \phi_i^e n^2 K_0^2 \phi_j^e dS = n^2 K_0^2 \frac{D}{24} (1 + \delta_{ij}) \quad (7.2-6)$$

$$B_{ij}^e = \int_e \phi_i^e \phi_j^e dS = \frac{D}{24} (1 + \delta_{ij}) \quad (7.2-7)$$

单元矩阵 \mathbf{K}^e 、 \mathbf{A}^e 、 \mathbf{B}^e 均是 3×3 的矩阵， \mathbf{K}^e 称作单元刚度阵， \mathbf{B}^e 称作单元质量阵，单元矩阵都是对称矩阵。这样就建立起了单元方程

$$(\mathbf{K}^e - \mathbf{A}^e) \mathbf{c}^e + \lambda \mathbf{B}^e \mathbf{c}^e = 0$$

(7.2-8) 图 7.4 单元、节点的编号



由于单元和节点都是在全区域进行依次编号的，图 7.4 是单元和节点的编号示意图，显然每个节点都被多个单元公用，所以单元方程不能独立求解，需要建立全局的本征值方程。以图 7.4 所示的 4 个单元、5 个节点的划分结果为例，各单元涉及的节点、矩阵和节点解向量列于表 7.1 中

这里只列出了矩阵 \mathbf{K}^e ，矩阵 \mathbf{A}^e 和 \mathbf{B}^e 形式完全相同。为得到全局方程，需将单元矩阵扩展成 5×5 的全局矩阵 \mathbf{K} 、 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} ，方法是将各单元矩阵元归位，同一位置的各单元矩阵元求和，不存在的矩阵元在相应位置填零。这样，总的全局矩阵为

表 7.1 节点、矩阵和节点解向量

单元	节点	单元矩阵	节点解向量
(1)	1 3 4	$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{13} & K_{14} \\ K_{31} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix}^{(1)}$	$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}$
(2)	1 2 3	$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix}^{(2)}$	$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$
(3)	2 5 3	$\begin{bmatrix} K_{22} & K_{25} & K_{23} \\ K_{52} & K_{55} & K_{53} \\ K_{32} & K_{35} & K_{33} \end{bmatrix}^{(3)}$	$\begin{bmatrix} c_2 \\ c_5 \\ c_3 \end{bmatrix}$
(4)	5 4 3	$\begin{bmatrix} K_{55} & K_{54} & K_{53} \\ K_{45} & K_{44} & K_{43} \\ K_{35} & K_{34} & K_{33} \end{bmatrix}^{(4)}$	$\begin{bmatrix} c_5 \\ c_4 \\ c_3 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} + K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} & K_{13}^{(1)} + K_{13}^{(2)} & K_{14}^{(1)} & 0 \\ K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} + K_{22}^{(3)} & K_{23}^{(2)} + K_{23}^{(3)} & 0 & K_{25}^{(3)} \\ K_{31}^{(1)} + K_{31}^{(2)} & K_{32}^{(2)} + K_{32}^{(3)} & K_{33}^{(1)} + K_{33}^{(2)} + K_{33}^{(3)} + K_{33}^{(4)} & K_{34}^{(1)} + K_{34}^{(4)} & K_{35}^{(3)} + K_{35}^{(4)} \\ K_{41}^{(1)} & 0 & K_{43}^{(1)} + K_{43}^{(4)} & K_{44}^{(1)} + K_{44}^{(4)} & K_{45}^{(4)} \\ 0 & K_{52}^{(3)} & K_{53}^{(3)} + K_{53}^{(4)} & K_{54}^{(4)} & K_{55}^{(3)} + K_{55}^{(4)} \end{bmatrix} \quad (7.2-9)$$

对于划分成 M 个单元、 N 个节点的一般情况，同样可以将 3×3 的单元矩阵扩展成 $N \times N$ 的全局总矩阵，即

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^M \mathbf{K}^e, \quad \mathbf{A} = \sum_{e=1}^M \mathbf{A}^e, \quad \mathbf{B} = \sum_{e=1}^M \mathbf{B}^e$$

扩展规则与前面相同。相应的全局方程为

$$(\mathbf{K} - \mathbf{A} + \lambda \mathbf{B}) \mathbf{c} = 0 \quad (7.2-10)$$

方程个数与节点数 N 相同， \mathbf{c} 是 $N \times 1$ 向量阵，即方程的解，代表 N 个节点上的场值。通常划分的单元非常多，节点数目大，一般 N 为 $10^3 \sim 10^6$ ，所以，总矩阵通常是对称的稀疏带状矩阵。

方程式 (7.2-10) 是一个广义本征值方程，有多种标准方法可以求解，如基于高斯消去法的 LU 分解法，基于迭代法的共轭梯度法和双共轭梯度法等，目前已有专门为大型线性方程组设计的专业软件。

由全局方程，解出不同本征值下的各节点解后，根据式 (7.2-2)，整个区域上的场分布为

$$\psi = \sum_{e=1}^M (c_i \phi_i^e + c_j \phi_j^e + c_k \phi_k^e) \quad (7.2-11)$$

总之，有限元方法就是将带有边界条件的微分方程转化为泛函的变分问题或积分方程，再将求解区域划分成非常小的有限多单元，利用基函数展开法，进一步将问题转化为求解本征值方程，最后进行数值计算。

7.2.4 二阶单元与基函数

为提高有限元解的精度，一方面可以采用较精细的网络划分，即较小的单元；另一方面就是应用高阶插值函数，即高阶单元。如二阶单元采用的插值函数是二次多项式，依次类推。

在二维情况下，一个二阶三角形单元有 6 个节点，即 3 个顶点和位于 3 个边上的 3 个中点（见图 7.5）， i 、 j 、 k 、 l 、 m 、 n 为全局编码，1、2、3、4、5、6 为单元局部编码。每个单元 e 内的插值函数表示成如下的二次函数

$$\psi^e(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 \quad (7.2-12)$$

设单元 e 的 6 个节点处的解为 c_i 、 c_j 、 c_k 、 c_l 、 c_m 、 c_n （待定），将它们依次代入插值函数，可确定 6 个系数 $\alpha_1 \sim \alpha_6$ ，再将其代回到式 (7.2-12)，得

$$\psi^e(x, y) = \sum_{i=1}^6 c_i \Phi_i^e(x, y) \quad (7.2-13)$$

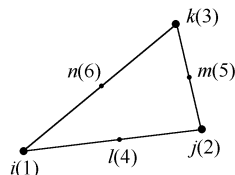


图 7.5 二阶三角形单元

为表示方便，这里采用了局部编码，上式中的基函数 Φ_i^e 分别为

$$\begin{aligned} \Phi_i^e(x, y) &= (2\phi_i^e - 1)\phi_i^e \quad (i=1, 2, 3); \\ \Phi_4^e(x, y) &= 4\phi_1^e\phi_2^e; \quad \Phi_5^e(x, y) = 4\phi_2^e\phi_3^e; \quad \Phi_6^e(x, y) = 4\phi_3^e\phi_1^e \end{aligned} \quad (7.2-14)$$

其中 ϕ_i^e 就是线性三角形单元（局部编码为 1、2、3，全局编码为 i 、 j 、 k ）的基函数式 (7.2-3)。

二阶三角形单元的单元矩阵是 6×6 的矩阵，根据式 (7.1-22) 和式 (7.1-25) 可得相应的矩阵元。与前面类似，将单元矩阵扩展成 $N \times N$ 的全局矩阵，就可得到二阶单元下的全局本征值方程，并可进一步求解。

同样的分析过程可以应用到更高阶单元以及三维情况下的高阶单元上，只是需要建立更多的基函数，推导过程非常烦琐，感兴趣的读者可参阅专门的电磁场的有限元应用方面的书籍。

7.3 光波导模式问题的应用举例

7.3.1 单元大小对计算结果的影响

对于折射率分布沿传播方向不变的正规波导，用有限元法研究其模式特征时，只需要在波导横截面内进行二维建模分析。为确定单元大小对计算结果的影响，以图 7.6 所示的平板波导为例。网格划分区域取 $25\mu\text{m} \times 8\mu\text{m}$ ，计算包括 $1.53\mu\text{m}$ 和 $0.98\mu\text{m}$ 两种波长的光场。该平板波导对这两种波长均只存在两个基模，即 TE_{01} 模和 TM_{01} 模，结果见表 7.2。对波长 $1.53\mu\text{m}$ 的光波，单元边长为 $0.25\mu\text{m}$ 时 TE_0 模和 TM_0 模开始出现好的物理解。而对 $0.98\mu\text{m}$ 的光波，单元边长为 $0.2\mu\text{m}$ 时，可解出 TE_0 模，这时 TM_0 模仍没有好的场解；当单元边长小于 $0.15\mu\text{m}$ 时，才能得到 $0.98\mu\text{m}$ 基模的两个解。

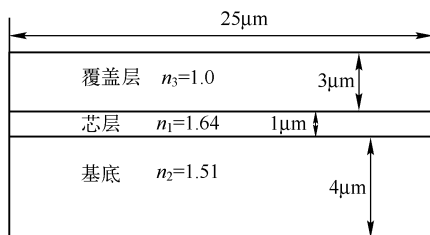


图 7.6 平板波导及建模区域

表 7.2 有限元大小对平板波导模计算结果的影响

芯单元大小 (μm)	芯/总单元数	芯/总节点数	传播常数 $\beta/\mu\text{m}^{-1}$			
			1.53 μm		0.98 μm	
			TE ₀	TM ₀	TE ₀	TM ₀
0.5	205/1304	438/2656	无物理解	无物理解	无物理解	无物理解
0.25	808/2918	1678/5903	6.4414	6.3917	无物理解	无物理解
0.2	1500/4149	3261/8487	6.4443	6.3919	10.2578	非好解
0.15	2674/6278	5697/12659	6.4458	6.3922	10.2603	10.2213
0.1	5502/10864	11525/21837	6.4469	6.3924	10.2626	10.2217
0.08	8772/15446	18197/31007	6.4473	6.3924	10.2630	10.2223
0.072	11120/15668	22965/31423	6.4474	6.3927	10.2630	10.2226

因此，我们的结论是进行网格划分时，至少要保证单元边长小于传输光波长的六分之一。单元边长继续减小，传播常数趋于恒定，得到的场分布也更精确。

7.3.2 脊波导模场的有限元计算

考虑图 7.7 中二维受限的脊形介质波导，仍采用上节的折射率分布， $n_1=1.64$ ， $n_2=1.51$ ， $n_3=1.0$ ，这种波导对应的是在具有氧化层的硅基片上制备的三氧化二铝(Al_2O_3)波导。这种相对折射率差较大的波导，虽然弱导条件不是很好，但通过数值计算，根据场分量近似的比值关系，仍可对场分量按强弱排序。结果表明，存在两种近似的偏振场模式。一种主要电磁场分量是 E_x 、 H_y 、 E_z ，并且 E_z 很小，即电场的主要分量在 x 方向，我们仍用 E_{mn}^x 表示该种场模式；另一种模式，主要电磁场分量是 E_y 、 H_x 、 H_z ，电场主要在 y 方向，所以仍用 E_{mn}^y 表示，模序数 m 、 n 分别代表场量在 x 轴、 y 轴方向出现极值的个数。

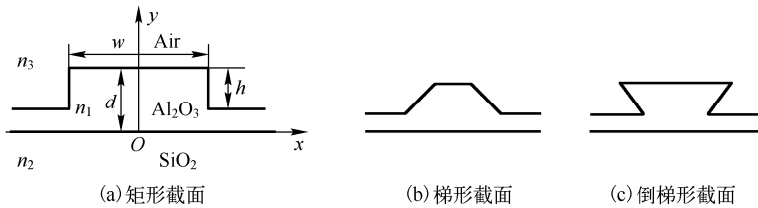


图 7.7 不同几何截面的脊波导

由于波导是没有金属壁的开放性结构，为了处理场的无限横向扩展问题，施加有效的边界条件，在远离波导芯的足够大距离处加上封闭墙，作为人为虚拟边界，施加零边界条件。设置墙的位置要既保证精度，又减少单元个数。例如，当矩形截面波导膜厚 $d=1\mu\text{m}$ ，脊宽 $w=3\mu\text{m}$ 时，选择封闭墙在脊上方 $3\mu\text{m}$ 和芯层下方 $4\mu\text{m}$ 处，区域为 $5\mu\text{m}\times 8\mu\text{m}$ ，见图 7.8。这里，考虑到对称性，仅对对称波导的一半进行建模(对称线为 y 轴)。为避免模式遗漏，分两次计算，先沿模型的对称线设置电墙(电场强度的切向分量为 0)，可得到 E_{11}^x 、 E_{21}^y 、 E_{31}^x 模等，因为根据对称性分析，这些模在 y 轴上各点的 $E_y=0$ 。再沿对称线设置磁墙(磁场强度的切向分量为 0)，重新计算可得到 E_{11}^y 、 E_{21}^x 、 E_{31}^y 模等，这些模在

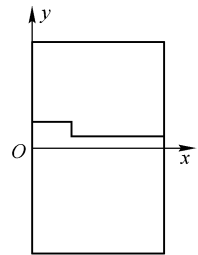


图 7.8 脊波导及有限元的建模区域

y 轴上各点的 $H_y=0$ 。通过施加这两种边界条件,得到完整的导模系。

图 7.9 示出了脊波导的色散特性曲线,即归一化传播常数 B 随脊高 h 的变化曲线,这是通过解不同结构波导的有限元方程的本征值得到的。 $h=0$ 是平板波导情形, $h=1\mu\text{m}$ 对应的是矩形波导。根据色散曲线可以对脊波导结构进行设计。

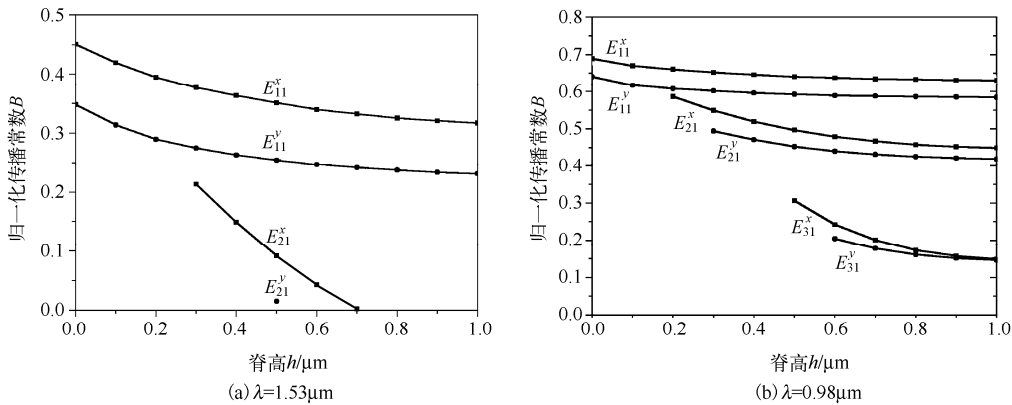


图 7.9 脊波导归一化传播常数 B 随脊高 h 的变化曲线

$0.98\mu\text{m}$ 光波的导模个数随脊高 h 的减小而减少,随着 h 的减小, E_{31}^y 、 E_{31}^x 、 E_{21}^y 、 E_{21}^x 模场由脊区向平板区和衬底区域延伸,并依次截止,最后转化为平板波导情形,只有基模 E_{11}^x 和 E_{11}^y 传输。

图 7.10 示出了 $1.53\mu\text{m}$ 光波 E_{11}^x 、 E_{21}^x 模的主要场分量 E_x 的等值线。图 7.11 所示为 E_{11}^x 模电场分布函数的三维图,可以看出, E_{11}^x 模电场强度的 x 分量最大, E_z 很小, E_y 更小。而磁场强度的 y 分量最大,要比其他两个分量大近 2 个数量级(图中未画出磁场分量)。所有的计算结果均表明,对 E_{mn}^x 模而言, E_x 、 H_y 、 E_z 是主要分量, E_{mn}^y 模的 E_y 、 H_x 、 H_z 是主要分量。主要分量的幅度比其他分量的幅度大 1~2 个数量级。因此根据脊形波导内的场分量的相对幅度和场分布,波导模式仍然可以像前面对矩形波导内场模式的分类一样,用 E_{mn}^y 与 E_{mn}^x 模来表示。

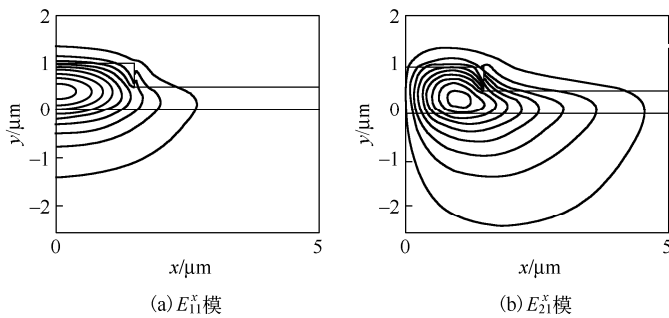


图 7.10 脊波导 E_{11}^x 模与 E_{21}^x 模的场分量 E_x 等值线

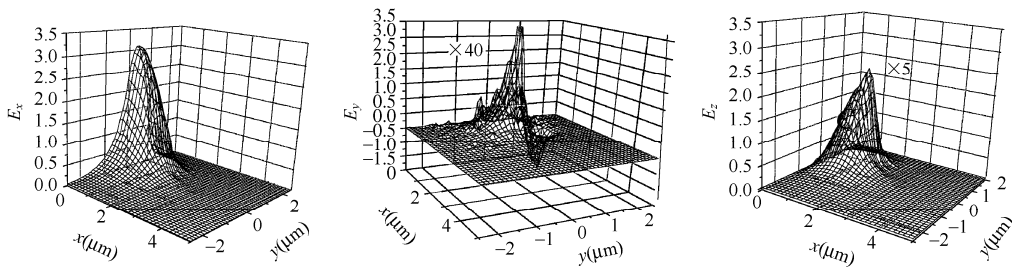


图 7.11 脊波导 E_{11}^x 模电场强度 E_x 、 E_y 、 E_z 分量的相对场幅

7.3.3 伪模

使用有限元法分析开放式的介质波导，最严重的问题是伪模问题。伪模属于非物理模式，它的出现，一方面是由于在解方程的过程中，没有考虑散度条件 $\nabla \cdot \epsilon \vec{E} = 0$ 的结果。另一方面是由数值技术引入的伪结果，这意味着矩阵本征值问题的许多本征值、本征矢不代表波导中的物理模。但如果只对低阶传输模感兴趣，这些伪模的出现就不是大问题，最低阶模通常对应于矩阵方程的第一个本征值。处理伪模一方面可通过修正泛函，增加一罚项来强制散度条件；也可以将单元内的场按单元棱边基函数展开。此外，对波导问题，非物理模的场在波导截面上的分布是随机变化的，因此通过观察模式的场分布图形就可以确定模式的真伪，尽管这种辨别比较烦琐。

如图 7.12 是进行脊波导模场求解计算时得到的某一本征值下的场分布，对应的归一化频率 B 在导模的范围内，但从场分量的等值线分布图上看，是随机变化的，没有任何物理意义，因此作为伪模而剔除掉。

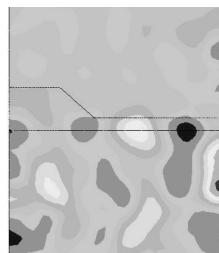


图 7.12 有限元分析脊波导时出现的伪模场

习题

7-1 基本概念：微分方程的边值问题，自伴算符，里兹方法，伽辽金方法，有限元方法的基本思想，单元，节点，插值函数，基函数，二阶单元，高阶单元，伪模。

7-2 证明边值问题 $L\phi = f$ ， $\phi|_{\Gamma} = 0$ 的解也是变分问题 $\delta F(\psi) = 0$ 的解，其中泛函 $F(\psi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (L\psi)\psi^* d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\psi f^* + \psi^* f) d\Omega$ ， Γ 是域 Ω 的边界。

7-3 用有限元法求解光波导中的电磁场，进行单元划分时需要注意哪些问题？

7-4 有两无限大平行板，一块位于 $x=0$ 处， $\Phi=0V$ ；另一块板位于 $x=1m$ 处， $\Phi=1V$ 。两块平行板间充满了介电常数为 $\epsilon(F/m)$ 的媒质，其间的电荷密度是变化的， $\rho(x) = -(x+1) \mu C/m^3$ 。用里兹法和伽辽金法求两无限大平行板间的静电势 Φ 。

7-5 说明有限元方法与经典里兹方法和伽辽金方法的不同之处。

7-6 试分析伪模存在的原因，如何剔除伪模。

第 8 章 模式耦合理论

理想情况下的正规波导，所有的传播模式之间，传播模式与辐射模式之间满足正交关系，各模式独立传播，模式间无能量交换。但在非理想的实际情况下，波导结构都或多或少存在一定的不完整性，如波导的损耗、波导边界或几何形状有畸变、材料不均匀、波导周围存在其他波导，或者是特意制作的波导结构的有规则的改变等，都会导致波导内模式间或波导之间的能量交换，这时称模式间发生了耦合。当两个波导靠得很近时，一个波导中的能量将耦合到另一个波导中，在另一个波导中激发出导模，这一导模场反过来又会对原来的波导产生影响，这种相互耦合称作横向耦合。另一方面，波导的纵向不均匀性，会导致光波反射，则波导中存在正、负两个方向传播的光波。这时传播模式的正交性也会受到破坏，不同模式间产生能量耦合，这种耦合称作纵向耦合。构成集成光路的大部分器件都是在各种不同的模式之间通过若干次耦合来处理 and 传输光波的，如光纤连接器、光模式转换器、光纤光栅、光波复用/解复用器及其他各类光纤或波导耦合器等。所以，对耦合机理的分析和计算是波导研究的重要内容之一。为描述光波在这类非正规波导中的传输行为，有效而精度又高的方法就是模式耦合理论，该理论适用范围极广。

8.1 模式的正交性与完备性

8.1.1 横场方程

为书写和讨论方便，我们将光波导中电磁场矢量沿横向和纵向进行分解

$$\vec{E} = \vec{E}_t + \vec{E}_z \quad \vec{H} = \vec{H}_t + \vec{H}_z$$

矢量算符也分解为横向和纵向两部分，即

$$\nabla = \nabla_t + \nabla_z$$

其中， $\nabla_z = \vec{z}_0 \frac{\partial}{\partial z}$ 。则有

$$\begin{aligned} \vec{E} \cdot \vec{H} &= \vec{E}_t \cdot \vec{H}_t + \vec{E}_z \cdot \vec{H}_z \\ (\vec{E} \times \vec{H})_t &= \vec{E}_t \times \vec{H}_z + \vec{E}_z \times \vec{H}_t \quad (\vec{E} \times \vec{H})_z = \vec{E}_t \times \vec{H}_t \\ (\nabla \times \vec{E})_t &= \nabla_t \times \vec{E}_z + \nabla_z \times \vec{E}_t \quad (\nabla \times \vec{E})_z = \nabla_t \times \vec{E}_t \end{aligned}$$

这样，可将电磁场基本方程 $\nabla \times \vec{E} = -i\omega\mu\vec{H}$ 和 $\nabla \times \vec{H} = i\omega\varepsilon_0 n^2 \vec{E}$ 分别写成横向分量和纵向分量形式

$$\begin{aligned} \nabla_t \times \vec{E}_t &= -i\omega\mu\vec{H}_z \quad \nabla_t \times \vec{E}_z + \nabla_z \times \vec{E}_t = -i\omega\mu\vec{H}_t \\ \nabla_t \times \vec{H}_t &= i\omega\varepsilon_0 n^2 \vec{E}_z \quad \nabla_t \times \vec{H}_z + \nabla_z \times \vec{H}_t = i\omega\varepsilon_0 n^2 \vec{E}_t \end{aligned}$$

于是得到关于横向场满足的微分方程

$$\nabla_t \times \nabla_t \times \vec{E}_t = n^2 K_0^2 \vec{E}_t + i\omega\mu\vec{z}_0 \times \frac{\partial}{\partial z} \vec{H}_t \quad (8.1-1)$$

$$\nabla_t \times \frac{1}{n^2} \nabla_t \times \vec{H}_t = K_0^2 \vec{H}_t - i\omega\varepsilon_0 \vec{z}_0 \times \frac{\partial}{\partial z} \vec{E}_t \quad (8.1-2)$$

8.1.2 模式的正交性及归一化

理想的正规波导，如前面介绍的薄膜波导、条形波导和光纤，其导模也称为正规模。正规模有确定的传播常数 β 和确定的受约束的场分布，这种场分布沿波导的传播方向是不变的，即各导波模式在无损耗的条件下独立传输，不同模式之间没有相互的能量传递。正规波导的模式(包括辐射模)之间都具有正交性。

设波导中任意两个模式 μ 和 ν ，其传播常数为 β_μ 和 β_ν ，则模式正交性定义为

$$\iint_{-\infty}^{\infty} (\vec{E}_{\mu t} \times \vec{H}_{\nu t}^*) \cdot \vec{z}_0 dx dy = 0 \quad (8.1-3a)$$

或者

$$\iint_{-\infty}^{\infty} (\vec{E}_{\mu t}^* \times \vec{H}_{\nu t}) \cdot \vec{z}_0 dx dy = 0 \quad (8.1-3b)$$

上述积分在波导的整个横截面上进行，其中 $\vec{E}_{\mu t}$ 和 $\vec{H}_{\nu t}$ 分别表示第 μ 个模的横向电场和第 ν 个模的横向磁场。

模式的正交性证明如下：

根据电磁场的基本方程，有

$$\vec{H}_\nu^* \cdot \nabla \times \vec{E}_\mu = -i\omega\mu \vec{H}_\mu \cdot \vec{H}_\nu^*$$

$$\vec{E}_\mu \cdot \nabla \times \vec{H}_\nu^* = -i\omega\varepsilon \vec{E}_\mu \cdot \vec{E}_\nu^*$$

二式相减，得

$$\begin{aligned} \vec{H}_\nu^* \cdot \nabla \times \vec{E}_\mu - \vec{E}_\mu \cdot \nabla \times \vec{H}_\nu^* &= i\omega(\varepsilon \vec{E}_\mu \cdot \vec{E}_\nu^* - \mu \vec{H}_\mu \cdot \vec{H}_\nu^*) \\ \nabla \cdot (\vec{E}_\mu \times \vec{H}_\nu^*) &= i\omega(\varepsilon \vec{E}_\mu \cdot \vec{E}_\nu^* - \mu \vec{H}_\mu \cdot \vec{H}_\nu^*) \end{aligned} \quad (8.1-4)$$

等式左侧用横向和纵向分量表示，为

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\vec{E}_\mu \times \vec{H}_\nu^*) &= \nabla_t \cdot (\vec{E}_\mu \times \vec{H}_\nu^*)_t + \vec{z}_0 \cdot \frac{\partial}{\partial z} (\vec{E}_\mu \times \vec{H}_\nu^*)_z \\ &= \nabla_t \cdot (\vec{E}_\mu \times \vec{H}_\nu^*)_t + \vec{z}_0 \cdot \left(\frac{\partial \vec{E}_\mu}{\partial z} \times \vec{H}_\nu^* + \vec{E}_\mu \times \frac{\partial \vec{H}_\nu^*}{\partial z} \right) \\ &= \nabla_t \cdot (\vec{E}_\mu \times \vec{H}_\nu^*)_t + (-i\beta_\mu \vec{E}_\mu \times \vec{H}_\nu^* + i\beta_\nu \vec{E}_\mu \times \vec{H}_\nu^*) \cdot \vec{z}_0 \end{aligned} \quad (8.1-5)$$

在整个无限大的波导横截面区域内，对式(8.1-4)进行积分，并利用二维散度定理，即

$$\iint_{\infty} \nabla_t \cdot \vec{A}_t dx dy = \oint_L \vec{A}_t \cdot \vec{n} dl = 0 \quad (\text{参考式(C-3)}), \text{ 得}$$

$$(\beta_\nu - \beta_\mu) \iint (\vec{E}_\mu \times \vec{H}_\nu^*) \cdot \vec{z}_0 dx dy = \omega \iint (\varepsilon \vec{E}_\mu \cdot \vec{E}_\nu^* - \mu \vec{H}_\mu \cdot \vec{H}_\nu^*) dx dy \quad (8.1-6)$$

两模式互换，做与上面同样的运算，并取共轭，得

$$(\beta_\mu - \beta_\nu) \iint (\vec{E}_\nu^* \times \vec{H}_\mu) \cdot \vec{z}_0 dx dy = \omega \iint (\varepsilon \vec{E}_\mu \cdot \vec{E}_\nu^* - \mu \vec{H}_\mu \cdot \vec{H}_\nu^*) dx dy \quad (8.1-7)$$

由式(8.1-6)与式(8.1-7)可得

$$(\beta_\nu - \beta_\mu) \iint (\vec{E}_\mu \times \vec{H}_\nu^* + \vec{E}_\nu^* \times \vec{H}_\mu) \cdot \vec{z}_0 dx dy = 0 \quad (8.1-8)$$

由于 $\beta_\mu \neq \beta_\nu$ ，所以

$$\iint (\vec{E}_\mu \times \vec{H}_\nu^* + \vec{E}_\nu^* \times \vec{H}_\mu) \cdot \vec{z}_0 dx dy = 0 \quad (8.1-9)$$

进一步，对模式 μ 进行反向变换，即设其沿 z 轴反方向传播，那么该反向模的传播常数和场矢量可由下面变换得到： $\beta_\mu \rightarrow -\beta_\mu$ ， $\vec{E}_{\mu z} \rightarrow -\vec{E}_{\mu z}$ ，而 $\vec{E}_\mu \rightarrow \vec{E}_\mu$ ， $\vec{H}_\mu \rightarrow -\vec{H}_\mu$ ，或者 $\vec{E}_\mu \rightarrow -\vec{E}_\mu$ ， $\vec{H}_\mu \rightarrow \vec{H}_\mu$ (通过 $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ 可以看出，传输方向反向后， \vec{E}_t 和 \vec{H}_t 只有一个改变方向)。那么，根据式(8.1-8)，模式 μ 的反向模与正向模式 ν 之间，有如下关系

$$(\beta_\nu + \beta_\mu) \iint (\vec{E}_\mu \times \vec{H}_\nu^* - \vec{E}_\nu^* \times \vec{H}_\mu) \cdot \vec{z}_0 dx dy = 0 \quad (8.1-10)$$

则有

$$\iint (\vec{E}_\mu \times \vec{H}_\nu^* - \vec{E}_\nu^* \times \vec{H}_\mu) \cdot \vec{z}_0 dx dy = 0 \quad (8.1-11)$$

式(8.1-9)与式(8.1-11)分别相加、相减得

$$\iint (\vec{E}_{\mu} \times \vec{H}_{\nu}^*) \cdot \vec{z}_0 dxdy = 0 \quad (8.1-12a)$$

$$\iint (\vec{E}_{\nu}^* \times \vec{H}_{\mu}) \cdot \vec{z}_0 dxdy = 0 \quad (8.1-12b)$$

至此, 模式的正交性证明完毕。

关于模式的正交性, 做以下几点讨论。

(1) 简并模的正交性

对于在同一传播常数 β 条件下的两个偏振方向互相垂直的简并模, 必然是正交的。因为 $\vec{E}_{\mu} \perp \vec{E}_{\nu}$, $\vec{E}_{\nu} \perp \vec{H}_{\nu}$, 所以 $\vec{E}_{\mu} \times \vec{H}_{\nu}^* = 0$, 正交式成立, 这时, 模式正交反映了矢量的正交性。

(2) 偏振模的正交性

对于同方向的偏振模, 因为 $\vec{E}_{\mu} // \vec{E}_{\nu}$, $\vec{E}_{\mu} \perp \vec{H}_{\nu}$, 因而

$$(\vec{E}_{\mu} \times \vec{H}_{\nu}^*) \cdot \vec{z}_0 = E_{\mu} H_{\nu}^*$$

这时, 模式正交性可表示为标量形式

$$\iint E_{\mu} H_{\nu}^* dxdy = 0$$

此式表示了函数的正交关系。

(3) 模的正交归一化

第 1 章已经讨论过, 光波导模式的平均能流密度 $\bar{S} = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E} \times \vec{H}^*)$, 其 z 方向分量的大小即为光强, 所以第 μ 个模的功率为

$$P_{\mu} = \frac{1}{2} \iint (\vec{E}_{\mu} \times \vec{H}_{\mu}^*) \cdot \vec{z}_0 dxdy \quad (8.1-13)$$

同样在整个波导截面内积分。该式与模式正交性的式(8.1-2), 可统一表示为

$$\iint (\vec{E}_{\mu} \times \vec{H}_{\nu}^*) \cdot \vec{z}_0 dxdy = 2P_{\mu} \delta_{\mu\nu} \quad (8.1-14)$$

P_{μ} 是一个待定常数。实际的模功率由实验条件决定, 如激发光波的光强分布、功率及耦合方式等。如果模式场满足 $P_{\mu} = 1$, 则该模式场分布称作归一化的模场分布, 它只与光波长及波导结构有关。因此, 模的正交归一化特性表示为

$$\iint (\vec{E}_{\mu} \times \vec{H}_{\nu}^*) \cdot \vec{z}_0 dxdy = 2\delta_{\mu\nu} \quad (8.1-15)$$

在后面的讨论中, \vec{E}_{μ} 和 \vec{H}_{μ} 等均代表归一化的模场。

当光波为平面波或准平面波时, $E_t / H_t = Z_0 / n$, 式(8.1-15)可以表示为

$$\iint E_{\mu x} E_{\nu y} dxdy = \frac{2Z_0}{n} \delta_{\mu\nu} \quad (8.1-16)$$

$Z_0 = 376.7\Omega$ 。此式可用于检验模场的计算结果。

(4) 辐射模的正交性

还可以证明, 不同特征值 β 的辐射模之间, 以及辐射模与导模之间都是正交的。由于辐射模式具有连续的传播常数, 两辐射模间的正交关系可表示为

$$\iint (\vec{E}_{\beta} \times \vec{H}_{\beta'}^*) \cdot \vec{z}_0 dxdy = 2\delta(\beta - \beta') \quad (8.1-17)$$

其中狄拉克函数(δ 函数)定义为: 当 $\beta \neq \beta'$ 时, $\delta(\beta - \beta') = 0$, $\int_0^{\infty} \delta(\beta - \beta') d\beta = 1$ 。上式中一个为辐射模, 另一个为导模时, 积分为 0。

8.1.3 展开式的完备性

光波导中的有限个离散的导波模式和具有连续谱的辐射模式，都是满足一定条件的电磁场方程的解，它们构成了光波导的完整的、正交的本征模式系。波导中实际任何电磁场的传输问题，都可以分解为这些本征模式的传输问题，或者说，实际电磁场必然可以表示为所有导波模式和辐射模式的场的叠加，这就是光波导模式的完备性，其数学表示式为

$$\vec{E}_t = \sum_{\mu} a_{\mu} \vec{E}_{\mu t} + \vec{E}_{rad} \quad (8.1-18a)$$

$$\vec{H}_t = \sum_{\mu} b_{\mu} \vec{H}_{\mu t} + \vec{H}_{rad} \quad (8.1-18b)$$

其中离散的导模的展开系数由激励条件决定，可由模式的正交归一化特性得到，即

$$a_{\mu} = \frac{1}{2} \iint (\vec{E}_t \times \vec{H}_{\mu t}^*) \cdot \vec{z}_0 dx dy \quad (8.1-19a)$$

$$b_{\mu} = \frac{1}{2} \iint (\vec{E}_{\mu t}^* \times \vec{H}_t) \cdot \vec{z}_0 dx dy \quad (8.1-19b)$$

展开式第二项 \vec{E}_{rad} 和 \vec{H}_{rad} 是连续谱的辐射模的总和，由于辐射模传播常数在 $0 < \beta < n_2 K_0$ 范围内，故有 $\vec{E}_{rad} = \int_0^{n_2 K_0} a_{\beta} \vec{E}_{\beta t} d\beta$ 。为了使表达式简洁，具有连续谱的辐射模的积分也写成求和的形式，并和第一项放在一起。实际上，光波稳定传输时，辐射模场 \vec{E}_{rad} 、 \vec{H}_{rad} 趋于零，所以通常可以省略辐射模项，视为耦合或辐射损耗。假设模式场均是归一化的，则传输光波的总功率为

$$P = \frac{1}{2} \iint (\vec{E}_t \times \vec{H}_t^*) \cdot \vec{z}_0 dx dy = \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu} a_{\mu} b_{\nu}^* \iint (\vec{E}_{\mu t} \times \vec{H}_{\nu t}^*) \cdot \vec{z}_0 dx dy = \sum_{\mu} a_{\mu} b_{\mu}^* = \sum_{\mu} P_{\mu} \quad (8.1-20)$$

这里的 P_{μ} 是实际的模功率，由展开系数 a_{μ} 、 b_{μ} 决定。上式说明，总场功率等于各导模功率之和。对于正规波导，归一化的模场分布与 z 无关，因此式 (8.1-19) 确定的 a_{μ} 、 b_{μ} 为常数。所以传播过程中各导模的功率不变，这也表明正交模是互相独立的，传输过程中模式间没有耦合或功率交换。

8.2 模耦合方程

前面已经证明理想的正规波导，模式之间不存在能量耦合，各导模独立传播。而实际的非正规波导，微小的几何变形、折射率沿传播方向的变化，都会导致模耦合。非正规波导边界条件复杂，很难直接严格求解。但实际上，许多非正规波导都可以视作由一个结构接近的正规波导受到几何形状或折射率等的扰动而得到的，如图 8.1 所示，因此通常可以采用将实际波导的传输场按正规波导的完备的正交模式展开的方法进行分析。由于模间相互影响，导模场功率将随 z 变化，所以展开系数 a_{μ} 、 b_{μ} 不再是常数。 a_{μ} 、 b_{μ} 不能再由简单的正交关系式求得，需要通过模耦合方程得到。

8.2.1 理想正规模式展开的模耦合方程

设实际非正规波导的折射率分布为 $n(x, y, z)$ ， n 既与横向坐标有关，还与纵向坐标 z 有关。 $n_0(x, y)$ 表示与其接近的理想正规波导的折射率分布。

设正规波导模场的横向分量为

$$\vec{E}_{\mu t} = \vec{e}_{\mu t} e^{-i\beta_{\mu} z} \quad (8.2-1a)$$

$$\vec{H}_{\mu t} = \vec{h}_{\mu t} e^{-i\beta_{\mu} z} \quad (8.2-1b)$$

对图 8.1(a) 所示的情形，以上二式是理想正规波导的本征模式场， \vec{e}_μ 、 \vec{h}_μ 和 β_μ 均与 z 无关。将二式分别代入横场方程式 (8.1-1) 和式 (8.1-2)，得模场方程为

$$\nabla_t \times \nabla_t \times \vec{e}_\mu = n_0^2 K_0^2 \vec{e}_\mu + \omega \mu \beta_\mu \vec{z}_0 \times \vec{h}_\mu \quad (8.2-2a)$$

$$\nabla_t \times \frac{1}{n_0^2} \nabla_t \times \vec{h}_\mu = K_0^2 \vec{h}_\mu - \omega \varepsilon_0 \beta_\mu \vec{z}_0 \times \vec{e}_\mu \quad (8.2-2b)$$

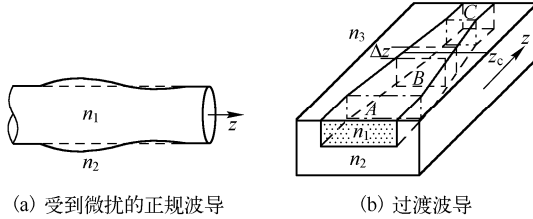


图 8.1 非正规波导的几何形变

设 \vec{E}_t 、 \vec{H}_t 是实际波导总电磁场的横向分量，那么总场的横场方程为

$$\nabla_t \times \nabla_t \times \vec{E}_t = n^2 K_0^2 \vec{E}_t + i \omega \mu \vec{z}_0 \times \frac{\partial}{\partial z} \vec{H}_t \quad (8.2-3a)$$

$$\nabla_t \times \frac{1}{n^2} \nabla_t \times \vec{H}_t = K_0^2 \vec{H}_t - i \omega \varepsilon_0 \vec{z}_0 \times \frac{\partial}{\partial z} \vec{E}_t \quad (8.2-3b)$$

将总场按正规模场展开

$$\vec{E}_t = \sum_v a_v \vec{e}_{vt} \quad (8.2-4a)$$

$$\vec{H}_t = \sum_v b_v \vec{h}_{vt} \quad (8.2-4b)$$

注意，式 (8.2-4) 已将与 z 有关的项，包括 $e^{-i\beta_z z}$ ，都放在了模系数 a_v 、 b_v 中。将上面二式代入总场方程式 (8.2-3)，得

$$\sum_v a_v \nabla_t \times \nabla_t \times \vec{e}_{vt} = n^2 K_0^2 \sum_v a_v \vec{e}_{vt} + i \omega \mu \sum_v \vec{z}_0 \times \frac{db_v}{dz} \vec{h}_{vt} \quad (8.2-5a)$$

$$\sum_v b_v \nabla_t \times \frac{1}{n^2} \nabla_t \times \vec{h}_{vt} = K_0^2 \sum_v b_v \vec{h}_{vt} - i \omega \varepsilon_0 \sum_v \vec{z}_0 \times \frac{da_v}{dz} \vec{e}_{vt} \quad (8.2-5b)$$

再将模场方程式 (8.2-2) 代入，得

$$\sum_v \left(\frac{db_v}{dz} + i \beta_v a_v \right) \vec{z}_0 \times \vec{h}_{vt} = i \omega \varepsilon_0 (n^2 - n_0^2) \sum_v a_v \vec{e}_{vt} \quad (8.2-6a)$$

$$\sum_v \left(\frac{da_v}{dz} + i \beta_v b_v \right) \vec{z}_0 \times \vec{e}_{vt} = \frac{i}{\omega \varepsilon_0} \sum_v b_v \nabla_t \times \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_0^2} \right) \nabla_t \times \vec{h}_{vt} \quad (8.2-6b)$$

用 \vec{e}_{μ}^* 点乘方程式 (8.2-6a)， \vec{h}_{μ}^* 点乘方程式 (8.2-6b)，并分别在整个横截面内积分，同时考虑模式的正交归一化条件

$$\iint (\vec{e}_{\mu}^* \times \vec{h}_{\nu}) \cdot \vec{z}_0 dx dy = 2 \delta_{\mu\nu}$$

得

$$\frac{db_\mu}{dz} + i \beta_\mu a_\mu = \frac{\omega \varepsilon_0}{2i} \sum_v a_v \iint (n^2 - n_0^2) \vec{e}_{\mu}^* \cdot \vec{e}_{\nu} dx dy \quad (8.2-7a)$$

$$\frac{da_\mu}{dz} + i \beta_\mu b_\mu = \frac{i}{2 \omega \varepsilon_0} \sum_v b_v \iint \vec{h}_{\mu}^* \cdot \nabla_t \times \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_0^2} \right) \nabla_t \times \vec{h}_{\nu} dx dy \quad (8.2-7b)$$

这就是按理想正规模式展开时获得的模耦合方程，通常写成如下形式

$$\begin{cases} \frac{db_\mu}{dz} + i\beta_\mu a_\mu = \sum_\nu K_{\mu\nu}^{(1)} a_\nu \\ \frac{da_\mu}{dz} + i\beta_\mu b_\mu = \sum_\nu K_{\mu\nu}^{(2)} b_\nu \end{cases} \quad (8.2-8)$$

其中

$$K_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{\omega\epsilon_0}{2i} \iint (n^2 - n_0^2) \vec{e}_{\mu t}^* \cdot \vec{e}_{\nu t} dx dy \quad (8.2-9)$$

$$\begin{aligned} K_{\mu\nu}^{(2)} &= \frac{i}{2\omega\epsilon_0} \iint \vec{h}_{\mu t}^* \cdot \nabla_t \times \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_0^2} \right) \nabla_t \times \vec{h}_{\nu t} dx dy \\ &= \frac{i}{2\omega\epsilon_0} \iint \vec{h}_{\mu t}^* \cdot \nabla_t \times \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_0^2} \right) i\omega\epsilon_0 n_0^2 \vec{e}_{\nu z} dx dy \\ &= \frac{1}{2} \iint \nabla_t \times \vec{h}_{\mu t}^* \cdot \left(\frac{n_0^2}{n^2} - 1 \right) \vec{e}_{\nu z} dx dy \\ &= \frac{\omega\epsilon_0}{2i} \iint \frac{n_0^2}{n^2} (n^2 - n_0^2) \vec{e}_{\mu z}^* \cdot \vec{e}_{\nu z} dx dy \end{aligned} \quad (8.2-10)$$

$K_{\mu\nu}^{(1)}$ 、 $K_{\mu\nu}^{(2)}$ 称作模耦合系数，分别描述了 μ 阶模与 ν 阶模之间电磁场的耦合程度。

由于通常情况下，纵场分量远小于横场分量，所以一般 $K_{\mu\nu}^{(2)} \ll K_{\mu\nu}^{(1)}$ 。由式(8.2-8)可以看出，各模展开系数的变化不是独立的，磁场的模系数 b_μ 的变化受所有电场的模系数 a_ν 的影响，反之亦然，说明模式之间有耦合，而且电场和磁场之间也存在交叉耦合。对于正规波导， $n = n_0$ ， $K_{\mu\nu}^{(1)} = 0$ ， $K_{\mu\nu}^{(2)} = 0$ ，这时模耦合方程可表示成关于 a_μ 、 b_μ 的两个独立的方程，表明每个模独立地、不受干扰地传播，模式间无耦合。

8.2.2 本地正规模式展开的模耦合方程

不是所有的实际波导都能有理想的正规波导与之接近，如图 8.1 (b) 所示的过渡波导，无论选择什么样的理想正规波导，计算耦合系数时，都会使 A 、 C 两段正规波导至少有一个区域内不为零，使问题复杂化。这时，采用本地正规波导的模式展开更为方便。

将图 8.1 (b) 中的过渡区波导近似成一系列长度为 Δz 的正规波导，每小段内，折射率分布与 z 无关，等于该段中心 $z = z_c$ 处的折射率分布，即 $n_0 = n(x, y, z_c)$ ，这就是本地正规波导。其本征模式，或称本地正规模式，也具有正交性和完备性。本地正规模横场可写作

$$\vec{E}_{\mu t} = \vec{e}_{\mu t}(x, y, \beta_\mu(z_c)) e^{-i\beta_\mu(z_c)z} \quad (8.2-11a)$$

$$\vec{H}_{\mu t} = \vec{h}_{\mu t}(x, y, \beta_\mu(z_c)) e^{-i\beta_\mu(z_c)z} \quad (8.2-11b)$$

也满足横向 Maxwell 方程式(8.1-1)和式(8.1-2)。这里特别需要注意的是，每段本地正规波导的折射率分布是不同的，与 z 有关，所以式(8.2-11)中的本地正规模传播常数 β_μ 不再是常数，而是 z 的函数，同时， $\vec{e}_{\mu t}$ 、 $\vec{h}_{\mu t}$ 及 $\vec{e}_{\mu z}$ 、 $\vec{h}_{\mu z}$ 也都是 z 的函数。所以不能再得到形如式(8.2-2)的模场方程。

我们把 z_c 处 Δz 段内实际波导的场按该本地正规模式展开，展开式与式(8.2-4)相同。将其代入横场方程式(8.1-1)和式(8.1-2)，并利用本地正规模的正交归一性，可得

$$\begin{cases} \frac{db_\mu}{dz} + i\beta_\mu a_\mu = \sum_\nu R_{\mu\nu} b_\nu \\ \frac{da_\mu}{dz} + i\beta_\mu b_\mu = \sum_\nu S_{\mu\nu} a_\nu \end{cases} \quad (8.2-12)$$

其中

$$R_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \iint z_0 \cdot \left(\vec{e}_{\mu}^* \times \frac{\partial \vec{h}_{\nu}}{\partial z} \right) dx dy \quad (8.2-13)$$

$$S_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \iint z_0 \cdot \left(\frac{\partial \vec{e}_{\nu}}{\partial z} \times \vec{h}_{\mu}^* \right) dx dy \quad (8.2-14)$$

具有任意不均匀性的波导，只要沿传播方向偏离理想正规波导的变化比较缓慢，应用本地正规模式就是一种很好的近似。

8.3 模耦合方程的微扰解——双向模耦合

基于理想正规模式的模耦合方程式(8.2-8)，其等号右边的求和项表示模式之间的相互作用，耦合的强弱由耦合系数 $K_{\mu\nu}^{(1)}$ 和 $K_{\mu\nu}^{(2)}$ 中的 $n^2 - n_0^2$ 决定。一般具有微弱不规则性的波导，这一差值很小，因此可以认为耦合是正规模式受到微扰产生的。为了求解模耦合方程，首先取零级近似， $n^2 = n_0^2$ ， $K_{\mu\nu}^{(1)} = 0$ ， $K_{\mu\nu}^{(2)} = 0$ ，则由

$$\begin{cases} \frac{db_{\mu}}{dz} + i\beta_{\mu}a_{\mu} = 0 \\ \frac{da_{\mu}}{dz} + i\beta_{\mu}b_{\mu} = 0 \end{cases} \quad (8.3-1)$$

二式分别相加减，得

$$\begin{cases} \frac{d}{dz}(a_{\mu} + b_{\mu}) + i\beta_{\mu}(a_{\mu} + b_{\mu}) = 0 \\ \frac{d}{dz}(a_{\mu} - b_{\mu}) - i\beta_{\mu}(a_{\mu} - b_{\mu}) = 0 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} a_{\mu} = c_{\mu}^+ e^{-i\beta_{\mu}z} + c_{\mu}^- e^{i\beta_{\mu}z} \\ b_{\mu} = c_{\mu}^+ e^{-i\beta_{\mu}z} - c_{\mu}^- e^{i\beta_{\mu}z} \end{cases} \quad (8.3-2)$$

$e^{-i\beta_{\mu}z}$ 项代表沿 z 轴正向传播的模式， $e^{i\beta_{\mu}z}$ 项代表反向传播模式，说明展开系数由正、反向两行波组成， c_{μ}^+ 和 c_{μ}^- 为正、反向的模振幅。显然零级解表示无耦合的正规波导模式， c_{μ}^+ 和 c_{μ}^- 是常数。采取变换常数法，解模耦合方程式(8.2-8)，令形式解仍为式(8.3-2)，但其中的 c_{μ}^+ 和 c_{μ}^- 是 z 的函数。

将式(8.2-8)的两方程分别相加减，得

$$2 \frac{d}{dz} (c_{\mu}^+ e^{-i\beta_{\mu}z}) + 2i\beta_{\mu} c_{\mu}^+ e^{-i\beta_{\mu}z} = \sum_{\nu} (K_{\mu\nu}^{(1)} + K_{\mu\nu}^{(2)}) c_{\nu}^+ e^{-i\beta_{\nu}z} + \sum_{\nu} (K_{\mu\nu}^{(1)} - K_{\mu\nu}^{(2)}) c_{\nu}^- e^{i\beta_{\nu}z} \quad (8.3-3a)$$

$$2 \frac{d}{dz} (c_{\mu}^- e^{i\beta_{\mu}z}) - 2i\beta_{\mu} c_{\mu}^- e^{i\beta_{\mu}z} = \sum_{\nu} (K_{\mu\nu}^{(2)} - K_{\mu\nu}^{(1)}) c_{\nu}^+ e^{-i\beta_{\nu}z} - \sum_{\nu} (K_{\mu\nu}^{(1)} + K_{\mu\nu}^{(2)}) c_{\nu}^- e^{i\beta_{\nu}z} \quad (8.3-3b)$$

令

$$K_{\mu\nu}^+ = \frac{1}{2} (K_{\mu\nu}^{(1)} + K_{\mu\nu}^{(2)}) \quad (8.3-4a)$$

$$K_{\mu\nu}^- = \frac{1}{2} (K_{\mu\nu}^{(1)} - K_{\mu\nu}^{(2)}) \quad (8.3-4b)$$

上述两个方程经整理，得

$$\frac{d}{dz} c_{\mu}^+ = \sum_{\nu} [K_{\mu\nu}^+ c_{\nu}^+ e^{i(\beta_{\mu} - \beta_{\nu})z} + K_{\mu\nu}^- c_{\nu}^- e^{i(\beta_{\mu} + \beta_{\nu})z}] \quad (8.3-5a)$$

$$\frac{d}{dz} c_{\mu}^- = -\sum_{\nu} [K_{\mu\nu}^- c_{\nu}^+ e^{-i(\beta_{\mu} + \beta_{\nu})z} + K_{\mu\nu}^+ c_{\nu}^- e^{-i(\beta_{\mu} - \beta_{\nu})z}] \quad (8.3-5b)$$

这是模耦合方程的另一种表示形式，说明正向、反向传播模都参与耦合。

根据式(8.1-20)和式(8.2-4)，光波传输时的实际功率为

$$P = \sum_{\mu} P_{\mu} = \sum_{\mu} a_{\mu} b_{\mu}^*$$

$$\begin{aligned} \text{由式(8.3-2)，又可写作} \quad P &= \sum_{\mu} (c_{\mu}^+ e^{-i\beta_{\mu}z} + c_{\mu}^- e^{i\beta_{\mu}z}) (c_{\mu}^{+*} e^{i\beta_{\mu}z} - c_{\mu}^{-*} e^{-i\beta_{\mu}z}) \\ &= \sum_{\mu} c_{\mu}^+ c_{\mu}^{+*} - \sum_{\mu} c_{\mu}^- c_{\mu}^{-*} = P^+ - P^- \end{aligned} \quad (8.3-6)$$

P^+ 为所有正向模功率之和， P^- 为所有反向模功率之和。上式推导中，略去了含 $e^{\pm i2\beta_{\mu}z}$ 的高频振荡项，只保留了“稳流”部分。这个结果说明，在沿传播方向折射率不均匀的情况下，由于模式耦合的作用，将激发反向的光波传输。对于双向模的传输，所谓功率 P ，代表沿正向的净功率流，它等于 $P^+ - P^-$ ，在“稳流”情况下，这个差值是不变的。因为在没有辐射也没有损耗的情况下，通过每一个横截面的光波功率都应该是相同的，否则将违背能量守恒定律。

以展开系数 a_{μ} 和 b_{μ} 形式给出的模耦合方程式(8.2-8)，与以正反模振幅 c_{μ}^+ 和 c_{μ}^- 形式给出的模耦合方程式(8.3-5)，在理论上是等价的，可互相代换。但 c_{μ}^+ 和 c_{μ}^- 代表了正向模和反向模，不仅具有明显的物理含义，而且由于快变因子 $e^{\pm i\beta_{\mu}z}$ 被分离， c_{μ}^+ 和 c_{μ}^- 成为慢变化振幅，求解过程采取近似方法更为方便。下一章在介绍光纤光栅时我们会看到这一模耦合方程在实际光学器件中应用的例子。

习题

8-1 基本概念：正规波导，正规模，模式正交性，模式的正交归一化，模式耦合，波导耦合。

8-2 举出一些正规光波导和非正规光波导的例子。

8-3 给出光波导电磁场 \vec{E} 和 \vec{H} 用归一化模场展开的表达式、展开系数的表达式及总功率的展开式。

8-4 什么是模式耦合？利用模式耦合可以构成哪些集成光学器件？

第9章 无源光器件

无源光器件是光网络中的重要组成部分，它不必借助外部的任何光或电的能量，由自身就能够完成某种光学功能。其工作原理遵守光学的基本规律，即光线理论和电磁波理论，它与导波光学、集成光学息息相关。无源光器件的种类非常多，光传输网络中使用的光纤连接器、光衰减器、光波分复用/解复用器、光耦合器、光滤波器、光纤光栅、平面波导光栅、光开关、光环行器等都属于无源光器件。其作用概括起来主要有：连接光波导或光路；控制光的传播方向；控制光功率的分配；控制光波导之间、器件之间和光波导与器件之间的光耦合以及合波和分波等。

本章将介绍几种无源光器件的原理和性能。

9.1 光纤光栅

光纤光栅指光纤芯区折射率沿传输方向周期性变化的光纤器件。1978年 K. O. Hill 等首先发现光纤纤芯中的某些掺杂元素如锗、锡、硼等，具有光敏效应，即光纤的折射率能够在某些波长光波的照射下发生永久性的改变，光纤芯区光敏性的峰值波长位于约 240nm 的紫外区。而光纤包层一般由非掺杂的纯 SiO_2 构成，对波长为 240nm 的光波几乎是透明的，在该波长光照射下，包层折射率不发生变化。所以，利用光纤材料的光敏性，通过紫外光曝光的方法将入射光相干场图样写入纤芯，使纤芯折射率沿轴向发生周期性变化，即可形成空间相位光栅。1989年 G. Meltz 等首次制作出谐振波长位于通信波段的光纤光栅。

根据光纤光栅的波矢方向、空间周期及周期大小，光纤光栅可分为四种基本类型，即布拉格光纤光栅、闪耀光纤光栅、啁啾光纤光栅和长周期光纤光栅。

布拉格光纤光栅 (FBG: Fiber Bragg Grating)，也称反射光栅，属于短周期光栅，其折射率变化的周期固定，一般小于 $1\mu\text{m}$ 。它是最早发展起来的光纤光栅，也是应用最广泛的光纤光栅。FBG 可将入射光中某一确定波长的光反射，反射带宽很窄。由光纤光栅提供选择性反馈的光纤激光器和半导体激光器可实现线宽只有千赫兹量级的单纵模激光输出。在传感器领域，光纤光栅的布拉格波长 (光栅反射的峰值波长) 与温度及施加在其上的应力呈良好的线性关系，这使 FBG 成为一种性能优良的光纤传感元件，可用于制作温度传感器、应变传感器等。在光通信领域，FBG 还可用于制作带通滤波器、分插复用器和波分复用器的解复用器等器件。

闪耀光纤光栅 (FBFG: Blazed Fiber Bragg Grating) 的光栅周期和折射率调制深度均为常数，但其光栅波矢量方向却不与光纤轴线相一致，而是成一定角度，或者说光栅条纹与光纤轴成一个小于 90° 的夹角，也称倾斜光纤光栅。闪耀光纤光栅不但会引起反向导波模耦合，而且还将基模耦合至包层模中损耗掉。它可用作掺铒光纤放大器的增益平坦器、光传播模式转播器等。

啁啾光纤光栅 (CFG: Chirped Fiber Grating) 的周期不是常数而是沿轴向单调变化的，可以是线性的也可以是非线性的。由于不同的栅格周期对应于不同的反射波长，啁啾光栅能够形成很宽的反射带，被广泛用于大容量密集波分复用 (DWDM) 系统中的色散补偿器件。

长周期光纤光栅 (LPFG: Long Period Fiber Grating) 也称透射光栅，其折射率变化的周期一般为几十至几百微米。它可将一定波长范围内入射光前向传播的芯内导模耦合到包层模并损耗掉。在传感器领域，长周期光纤光栅可用于制作微弯传感器、折射率传感器等；在光通信领域，

长周期光纤光栅可用于制作掺铒光纤放大器增益平坦器、模式转换器、带阻滤波器等器件。

采用适当的紫外光源和光纤增敏技术，可以在各种光纤上不同程度地写入光栅，窄线宽准分子激光器是目前用来制作光纤光栅最为适宜的光源。成栅方法有很多，短周期光纤光栅的制作一般包括如下几种方法：

(1) 驻波法：将波长 488nm 的激光从一个端面耦合到掺杂光纤中，经过光纤另一端面反射镜的反射，使光纤中的入射和反射激光相干涉形成驻波。由于纤芯材料具有光敏性，其折射率发生相应的周期变化，于是形成了与干涉周期一样的折射率光栅，它起到了 Bragg 反射器的作用。但此方法只能够制作布拉格波长与写入波长相同的光纤光栅。

(2) 干涉法：用两束相干紫外光在光纤的侧面相干，干涉图决定了折射率光栅的周期，可通过入射光波长或两相干光束之间的夹角加以控制。

(3) 单脉冲逐点写入法：此方法需要复杂的聚焦光学系统和精确的位移移动技术。

(4) 相位掩膜法：将用电子束曝光刻好的图形掩膜置于光纤上，紫外光经过掩膜相位调制后衍射到光纤上形成干涉条纹，写入周期为掩膜周期一半的 Bragg 光栅。

长周期光纤光栅的制作一般采用振幅掩膜法和逐点写入法，可制成周期在 $60\mu\text{m}\sim 1\text{mm}$ 范围内变化的光栅，这种方法对紫外光的相干性没有要求。

本节主要介绍 FGB，图 9.1 是其示意图。正规光纤的折射率为

$$n_0 = \begin{cases} n_1 & (r < a) \\ n_2 & (r > a) \end{cases}$$

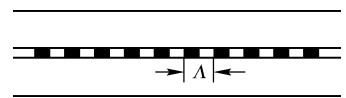


图 9.1 光纤光栅

光纤在周期性紫外光照射下其芯区折射率发生了周期性的改变，设光纤光栅折射率分布为

$$n = \begin{cases} n_1 + \Delta n \cos \Omega z & (r < a) \\ n_2 & (r > a) \end{cases} \quad (9.1-1)$$

式中， Ω 为光栅空间频率， $\Omega = 2\pi/\Lambda$ ， Λ 为光栅周期，FBG 的 Λ 一般为 $0.2\sim 0.5\mu\text{m}$ 。 Δn 是折射率调制深度，典型值为 $10^{-5}\sim 10^{-3}$ 。通常，光纤光栅长度 L 远大于光栅周期 Λ ，一般为 $1\sim 3\text{mm}$ 。忽略高一级小项，折射率的改变近似可由下式给出

$$n^2 - n_0^2 = \begin{cases} 2n_1\Delta n \cos \Omega z & (r < a) \\ 0 & (r > a) \end{cases} \quad (9.1-2)$$

9.1.1 光纤光栅耦合方程

实际应用中光纤光栅一般是单模光纤光栅，模式耦合主要发生于基模 LP_{01} 模的正反向模之间。由双向模耦合方程式(8.3-5)得

$$\frac{d}{dz} c^+ = K^+ c^+ + K^- c^- e^{i2\beta z} \quad (9.1-3a)$$

$$\frac{d}{dz} c^- = -K^+ c^- - K^- c^+ e^{-i2\beta z} \quad (9.1-3b)$$

为求解该耦合方程，首先确定耦合系数 K^+ 和 K^-

$$\begin{aligned} K_{11}^{(1)} &= \frac{\omega \varepsilon_0}{2i} \iint (n^2 - n_0^2) \vec{e}_{1r}^* \cdot \vec{e}_{1r} dx dy = \frac{\omega \varepsilon_0}{2i} (2n_1 \Delta n \cos \Omega z) \iint_{r < a} e_x \cdot \frac{Z_0}{n_1} h_y dx dy \\ &= -i2K_0 \eta \Delta n \cos \Omega z \end{aligned} \quad (9.1-4)$$

其中 $e_x = Z_0 h_y / n_1$ ， $Z_0 = \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0}$ ， η 为功率因子。

$$K_{11}^{(2)} = \frac{\omega \varepsilon_0}{2i} \iint \frac{n_0^2}{n_1^2} (n^2 - n_0^2) \vec{e}_{1z}^* \cdot \vec{e}_{1z} dx dy \quad (9.1-5)$$

该项的被积函数为纵场分量，与 $K_{11}^{(1)}$ 比较是一小量，忽略该项，有

$$K^{\pm} = \frac{1}{2}(K_{11}^{(1)} \pm K_{11}^{(2)}) = \frac{1}{2}K_{11}^{(1)} \quad (9.1-6)$$

$$K^{+} = K^{-} = -iK_0\eta\Delta n \cos \Omega z \quad (9.1-7)$$

设 $\tilde{K} = K_0\eta\Delta n$ ，则

$$K^{+} = K^{-} = -i\tilde{K} \cos \Omega z \quad (9.1-8)$$

近似的，功率因子 $\eta \approx 1$ ，那么有

$$\tilde{K} \approx K_0\Delta n \quad (9.1-9)$$

代入方程式 (9.1-3)，得

$$\frac{d}{dz}c^{+} = -i\tilde{K} \cos \Omega z [c^{+} + c^{-}e^{i2\beta z}] \quad (9.1-10a)$$

$$\frac{d}{dz}c^{-} = i\tilde{K} \cos \Omega z [c^{-} + c^{+}e^{-i2\beta z}] \quad (9.1-10b)$$

将其写成如下形式

$$\frac{d}{dz}c^{+} = -i\tilde{K}c^{+} \cos \Omega z - \frac{i}{2}\tilde{K}c^{-}[e^{i(2\beta+\Omega)z} + e^{i(2\beta-\Omega)z}] \quad (9.1-11a)$$

$$\frac{d}{dz}c^{-} = i\tilde{K}c^{-} \cos \Omega z + \frac{i}{2}\tilde{K}c^{+}[e^{-i(2\beta+\Omega)z} + e^{-i(2\beta-\Omega)z}] \quad (9.1-11b)$$

求解微分方程过程中，考虑到 $\int e^{-i\alpha z} dz \sim 1/\alpha$ ，所以高频(和频)项积分会出现较大的分母，因而可以忽略掉和频项。 c^{+} 和 c^{-} 成为缓变量，代表慢变化振幅，这样做也相当于对低频的缓变函数进行平滑处理。这样上面的耦合方程可简化为

$$\frac{d}{dz}c^{+} = -\frac{i}{2}\tilde{K}c^{-}e^{i2qz} \quad (9.1-12a)$$

$$\frac{d}{dz}c^{-} = \frac{i}{2}\tilde{K}c^{+}e^{-i2qz} \quad (9.1-12b)$$

其中， $q = \beta - \Omega/2$ ，称为频率偏差量或失谐量。对于布拉格光栅， $\Lambda = \lambda_B/(2n_1)$ ，布拉格波长 λ_B 是满足光纤光栅布拉格条件的光波在自由空间的波长，也是光纤光栅的中心波长，所以 $\Omega/2$ 与 β 的量级相当。为求解方程式 (9.1-12)，先给出形式解，令 $c^{+} = Ae^{\alpha_1 z}$ ， $c^{-} = Be^{\alpha_2 z}$ ，得

$$\alpha_1 Ae^{\alpha_1 z} = -\frac{i}{2}\tilde{K}Be^{\alpha_2 z}e^{i2qz} \quad (9.1-13a)$$

$$\alpha_2 Be^{\alpha_2 z} = \frac{i}{2}\tilde{K}Ae^{\alpha_1 z}e^{-i2qz} \quad (9.1-13b)$$

解得 $\alpha_1 - \alpha_2 = 2iq$ ， $\alpha_1\alpha_2 = \tilde{K}^2/4$ ，说明 α_1 与 α_2 共轭，方程有如下两组解

$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha + iq \\ \alpha_2 = \alpha - iq \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} \alpha_1 = -\alpha + iq \\ \alpha_2 = -\alpha - iq \end{cases}$$

其中

$$\alpha = \sqrt{\tilde{K}^2/4 - q^2} \quad (9.1-14)$$

因此得到

$$c^{+} = (A_1e^{\alpha z} + A_2e^{-\alpha z})e^{iqz} \quad (9.1-15a)$$

$$c^{-} = (B_1e^{\alpha z} + B_2e^{-\alpha z})e^{-iqz} \quad (9.1-15b)$$

在假设 $q^2 \leq \tilde{K}^2/4$ 的情况下，由式 (9.1-13a) 有， $\alpha_1 A = -\frac{i}{2}\tilde{K}B$ ，可得

$$B_1 = \frac{2i(\alpha + iq)}{\tilde{K}}A_1 \quad (9.1-16a)$$

$$B_2 = \frac{2i(-\alpha + iq)}{\tilde{K}} A_2 \quad (9.1-16b)$$

对长度为 L 的光栅, $z \in [0, L]$, 利用光纤光栅边界条件

$$c^+(0) = c_0, \quad c^-(L) = 0 \quad (9.1-17)$$

由式 (9.1-15), 得

$$A_1 + A_2 = c_0 \quad (9.1-18)$$

$$B_1 e^{\alpha L} + B_2 e^{-\alpha L} = 0 \quad (9.1-19)$$

即

$$\frac{2i\alpha - 2q}{\tilde{K}} A_1 e^{\alpha L} + \frac{-2i\alpha - 2q}{\tilde{K}} (c_0 - A_1) e^{-\alpha L} = 0 \quad (9.1-20)$$

于是得到相关的参量^①

$$A_1 = \frac{(\alpha - iq)e^{-\alpha L}}{\alpha \operatorname{ch}(\alpha L) + iq \operatorname{sh}(\alpha L)} \frac{c_0}{2}, \quad A_2 = \frac{(\alpha + iq)e^{\alpha L}}{\alpha \operatorname{ch}(\alpha L) + iq \operatorname{sh}(\alpha L)} \frac{c_0}{2}$$

$$B_1 = \frac{i\tilde{K}e^{-\alpha L}}{\alpha \operatorname{ch}(\alpha L) + iq \operatorname{sh}(\alpha L)} \frac{c_0}{4}, \quad B_2 = \frac{-i\tilde{K}e^{\alpha L}}{\alpha \operatorname{ch}(\alpha L) + iq \operatorname{sh}(\alpha L)} \frac{c_0}{4}$$

代回式 (9.1-15) 得

$$c^+ = c_0 \frac{\alpha \operatorname{ch}[\alpha(z-L)] - iq \operatorname{sh}[\alpha(z-L)]}{\alpha \operatorname{ch}(\alpha L) + iq \operatorname{sh}(\alpha L)} e^{iqz} \quad (9.1-21)$$

$$c^- = c_0 \frac{i(\tilde{K}/2) \operatorname{sh}[\alpha(z-L)]}{\alpha \operatorname{ch}(\alpha L) + iq \operatorname{sh}(\alpha L)} e^{-iqz} \quad (9.1-22)$$

相应的正向和反向功率分别为

$$P^+ = c^+ c^{+*} = c_0^2 \frac{\alpha^2 \operatorname{ch}^2[\alpha(z-L)] + q^2 \operatorname{sh}^2[\alpha(z-L)]}{\alpha^2 \operatorname{ch}^2(\alpha L) + q^2 \operatorname{sh}^2(\alpha L)} \quad (9.1-23)$$

$$P^- = c^- c^{-*} = \frac{c_0^2}{4} \frac{\tilde{K}^2 \operatorname{sh}^2[\alpha(z-L)]}{\alpha^2 \operatorname{ch}^2(\alpha L) + q^2 \operatorname{sh}^2(\alpha L)} \quad (9.1-24)$$

9.1.2 光纤光栅传输特性

下面讨论正向和反向能流。

根据式 (9.1-23) 和式 (9.1-24), 其中 $z \in [0, L]$, 在光栅区间内, 正向和反向传输功率 P^+ 和 P^- 均是单调下降的, 而且

$$P^+(0) = c_0^2, \quad P^+(L) = \frac{c_0^2 \alpha^2}{\alpha^2 \operatorname{ch}^2(\alpha L) + q^2 \operatorname{sh}^2(\alpha L)}$$

$$P^-(0) = \frac{c_0^2}{4} \frac{\tilde{K}^2 \operatorname{sh}^2(\alpha L)}{\alpha^2 \operatorname{ch}^2(\alpha L) + q^2 \operatorname{sh}^2(\alpha L)}, \quad P^-(L) = 0$$

$P^+(L)$ 代表透射光功率, $P^-(0)$ 代表反射光功率。根据上式, $P^+(L) + P^-(0) = c_0^2$, 二者之和正好等于入射光功率, 符合能量守恒。由式 (9.1-14), $\alpha^2 + q^2 = \tilde{K}^2/4$, 光栅的反射率为

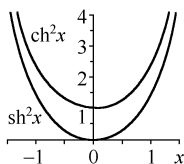
$$R = \frac{P^-(0)}{P^+(0)} = \frac{(\tilde{K}^2/4) \operatorname{sh}^2(\alpha L)}{\alpha^2 + (\tilde{K}^2/4) \operatorname{sh}^2(\alpha L)} \quad (9.1-25)$$

① 双曲正弦和双曲余弦

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$



$$\text{透射率为} \quad T = \frac{P^+(L)}{P^+(0)} = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + (\tilde{K}^2/4) \text{sh}^2(\alpha L)} \quad (9.1-26)$$

自然有 $R + T = 1$ 。同时还有

$$P^+(z) - P^-(z) = c_0^2 \frac{\alpha^2}{\alpha^2 \text{ch}^2(\alpha L) + q^2 \text{sh}^2(\alpha L)} \quad (9.1-27)$$

代表光纤光栅中的净能流 P 。 P 与 z 无关，是不变量，说明光栅中各处净能流不变，见图 9.2。

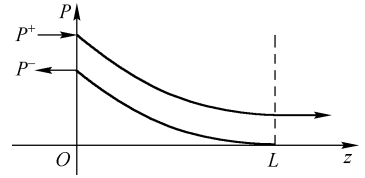


图 9.2 光纤光栅中的能流变化

9.1.3 光纤光栅滤波特性

1. 光谱主峰

式(9.1-25)和式(9.1-26)中的反射率 R 和透射率 T 都是 α 的函数，其中 $\alpha^2 = \tilde{K}^2/4 - q^2$ ，这里 $\tilde{K} = K_0 \cdot \Delta n$ ， $q = \beta - \Omega/2$ ，因此也可以说 R 、 T 为 β 的函数。当 α 在实数范围内时，各参量的取值范围是

$$q \in (-\tilde{K}/2, \tilde{K}/2), \beta \in (\Omega/2 - \tilde{K}/2, \Omega/2 + \tilde{K}/2), \alpha \in (-\tilde{K}/2, \tilde{K}/2)$$

在 β 的变化域内，中心频率 $\beta_0 = \Omega/2$ ，带宽 $\Delta\beta = \tilde{K}$ ，这表明光栅的带宽与折射率的调制深度 Δn 有直接关系。考察上述范围内 R 和 T 的变化行为，因为 $R + T = 1$ ，只需研究二者之一相对 α 的变化即可。由式(9.1-26)，透射率的表达式可写成

$$T = \frac{1}{1 + \frac{\tilde{K}^2 L^2}{4} \left[\frac{\text{sh}(\alpha L)}{\alpha L} \right]^2} \quad (9.1-28)$$

上式的变量为 $\text{sh}(\alpha L)/(\alpha L)$ ，取它的小量渐近展开式

$$\frac{\text{sh} x}{x} \approx 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \dots \quad (x \rightarrow 0)$$

可见，当 $\alpha = \pm \tilde{K}/2$ 时， $\text{sh}(\alpha L)/(\alpha L)$ 为最大值，这时 T 最小， R 最大，称作反射主极大。此时 $q = 0$ ，即 $\beta = \Omega/2$ ，称为谐振状态。由式(9.1-25)和式(9.1-26)可得谐振状态下的反射率和透射率分别为

$$R_{\max} = \frac{\text{sh}^2(\tilde{K}L/2)}{\text{ch}^2(\tilde{K}L/2)} \quad (9.1-29)$$

$$T_{\min} = \frac{1}{\text{ch}^2(\tilde{K}L/2)} \quad (9.1-30)$$

例如，已知 $\lambda_B = 1.55 \mu\text{m}$ ， $L = 2 \text{mm}$ ， $\Delta n = 10^{-3}$ ， $n = 1.46$ ，则 $\tilde{K}L/2 = 4.05$ ， $R_{\max} = 0.9988$ ， $T_{\min} = 1.2 \times 10^{-3}$ 。理论上， R 不可能等于 1。

当 $\alpha = 0$ 时，对应 $\text{sh}(\alpha L)/(\alpha L)$ 取最小值，所以 T 最大， R 最小，称作边值。此时 $q = \pm \tilde{K}/2$ ， $\beta = \Omega/2 \pm \tilde{K}/2$ ，为失谐状态，对应的边值反射率和透射率分别为

$$R_s = \frac{\tilde{K}^2 L^2}{4 + \tilde{K}^2 L^2} \quad (9.1-31)$$

$$T_s = \frac{4}{4 + \tilde{K}^2 L^2} \quad (9.1-32)$$

仍以上面的光纤光栅数据为例， $R_s = 0.9425$ ， $T_s = 5.75 \times 10^{-2}$ 。表明边值反射率仅下降 5% 左右。

在光栅带宽 $\left(\beta_0 - \frac{\tilde{K}}{2}, \beta_0 + \frac{\tilde{K}}{2}\right)$ 范围内，光栅不支持光波传输，大部分入射光被反射。

2. 两翼光谱

当入射光的相位常数进一步偏离中心频率时，失谐量 $q^2 > \tilde{K}^2/4$ ，显然超出了前面求解耦合方程式 (9.1-12) 过程中限定的 $q^2 \leq \tilde{K}^2/4$ 的范围，此时 α 为虚数。为了避免重复计算，采取一个快捷的方法，令 $\alpha = i\alpha'$ ，其中

$$\alpha' = \sqrt{q^2 - \tilde{K}^2/4} \quad (9.1-33)$$

代入 R 、 T 的表达式，并注意双曲函数的变换， $\text{ch}(ix) = \cos x$ ， $\text{sh}(ix) = i \sin x$ ，可得

$$R = \frac{(\tilde{K}^2/4) \sin^2(\alpha' L)}{\alpha'^2 \cos^2(\alpha' L) + q^2 \sin^2(\alpha' L)} = \frac{(\tilde{K}^2/4) \sin^2(\alpha' L)}{\alpha'^2 + (\tilde{K}^2/4) \sin^2(\alpha' L)} \quad (9.1-34)$$

$$T = \frac{\alpha'^2}{\alpha'^2 \cos^2(\alpha' L) + q^2 \sin^2(\alpha' L)} = \frac{\alpha'^2}{\alpha'^2 + (\tilde{K}^2/4) \sin^2(\alpha' L)} \quad (9.1-35)$$

此二式表明光谱的两侧呈现振荡线型，如图 9.3 所示，这与普通光栅的色散谱是一致的，实际上这也是多光束干涉的结果。

两翼谱与主峰的交界处， $q = \pm \tilde{K}/2$ 时，由 $\alpha'^2 + \tilde{K}^2/4 = q^2$ ，有 $\alpha' = 0$ ，此时

$$R_s = \frac{\tilde{K}^2 L^2}{4 + \tilde{K}^2 L^2} \quad T_s = \frac{4}{4 + \tilde{K}^2 L^2}$$

这一边值与主峰边值是一致的，表明光谱线型是连续的，但主峰两侧反射率快速下降。光纤光栅的光谱主峰宽度为 $\Delta\beta = K_0 \Delta n$ ，对单模光纤的基模 LP_{01} 模，远离截止条件下， $\beta \approx n_1 K_0$ ，即 $\Delta\beta = n_1 \Delta K_0$ ，有 $\Delta K_0 / K_0 = \Delta n / n$ ，所以

$$\Delta\lambda = \Delta n \lambda / n \quad (9.1-36)$$

由前面的数据，主峰宽度 $\Delta\lambda$ 约为 1nm。主峰具有高反射率，表明谐振波长处正向基模的能量耦合到反向基模中，从透射端来看布拉格光纤光栅是一个带阻滤波器，从反射端看则是一个带通滤波器，即是一个波长选择器。图 9.3 示出了以波长为变量的光纤光栅的滤波特性。反射率、反射谱带宽均与折射率调制深度 Δn 和光栅长度 L 有关， Δn 越大， L 越长，反射率越高；带宽随 Δn 增大而增大，但随 L 的增大而减小。

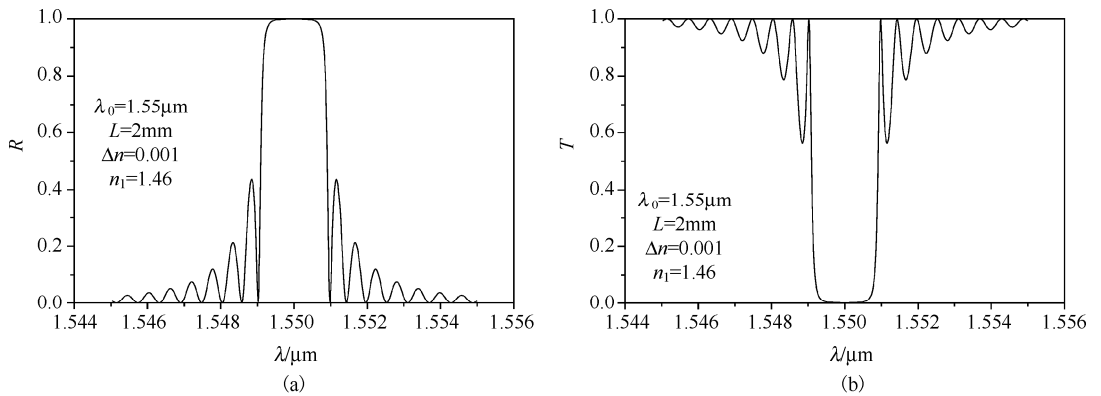


图 9.3 光纤光栅的滤波特性

由式 (9.1-34)，两翼光谱中反射率 R 的次级大对应 $\alpha' L = \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi$ ，则

$$R_m = \frac{1}{1 + 4\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{\pi}{\tilde{K}L}\right)^2} \quad (9.1-37)$$

R 的零点则对应 $\alpha'L = m\pi$ ，此时

$$\alpha' = m\pi/L \quad (9.1-38)$$

侧峰宽度为

$$\Delta\alpha' = \pi/L \quad (9.1-39)$$

由 $\alpha'\Delta\alpha' = q\Delta\beta = q\frac{2\pi n}{\lambda^2}\Delta\lambda$ ，可得波长为参变量的光谱侧峰宽

$$\Delta\lambda = \frac{m\pi\lambda^2}{2nL\sqrt{m^2\pi^2 + \left(\frac{\tilde{K}L}{2}\right)^2}} \quad (9.1-40)$$

利用前面数据，可知邻近主峰的 4 个侧峰宽度分别为 0.25nm、0.35nm、0.38nm、0.39nm，反射率依次减小。

9.2 平面波导光栅

波导内部微细的周期性结构就形成了平面波导光栅，它已被广泛地用于集成光路中，如输入输出耦合器、波长滤波器、波分复用器、模变换器等。波导光栅不仅可以用来制作各种各样的无源器件，也可以用来制作光波调制用的有源器件，是集成光路的重要元件之一。图 9.4 示出了集成光路中使用的各种平面波导光栅，可以看出波导光栅在结构上比光纤光栅更加多样化，因此应用也更加广泛。

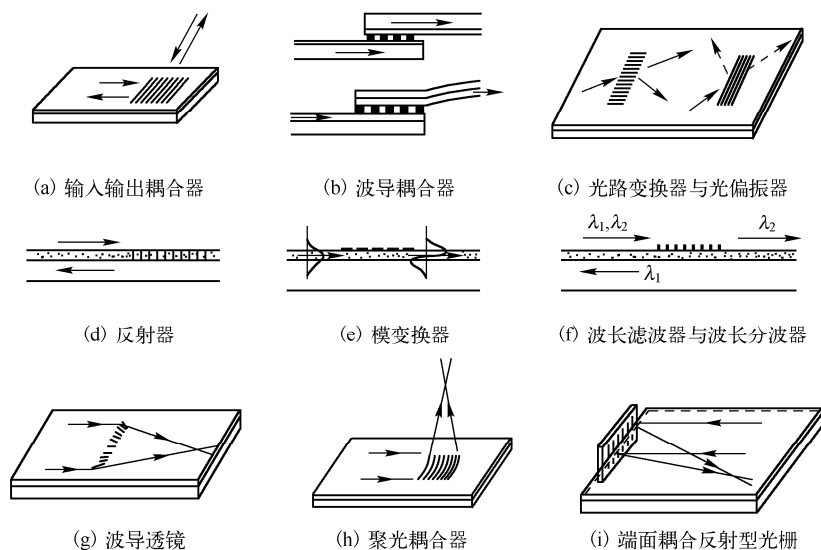


图 9.4 集成光路中的各种无源光栅器件

波导光栅在结构上可分为折射率调制型和起伏型，如图 9.5 所示。折射率调制型光栅是波导内介质折射率或者波导附近介质的折射率发生周期性变化的光栅。这种光栅的制作过程是，利用激光束的干涉或者电子束照射那些对激光或电子束敏感的介质表面，使介质折射率因照射而发生周期性改变。如果利用表面弹性波激励或施加电压，即通过声光效应或电光效应等引起瞬间折射率周期性的变化，还可以制成可控光栅。起伏型光栅是在波导层的表面敷设出周期性起伏的加载层，或者是将波导层与覆盖层的交界面制成周期性的栅状结构的一种光栅。这种光栅可利用光的干涉条纹或电子束扫描使光致抗蚀剂曝光，以用作光栅的掩模图形，再借助于光刻及薄膜沉积与刻蚀技术而制得。

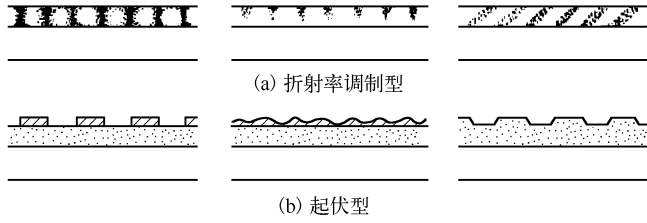


图 9.5 平面波导光栅结构

如图 9.4(a) 所示, 光波导中的传输模式通过光栅区域时, 在该区域激发起辐射模式(衍射场), 导模通过衍射光将能量传输到衬底或覆盖层, 就构成了输出耦合。反之, 波导外照射到光栅上的光波, 也可以激励起波导的导模, 将能量有效地耦合到波导中传输, 则构成输入耦合。除此之外, 波导光栅还可以实现图 9.4 中其他各种功能。但不管完成哪种功能, 光栅结构是哪一种, 我们都是要分析涉及模耦合的光传输特征。原则上讲, 任何形状的光栅结构的耦合原理和分析方法都一样, 因此为了方便, 我们选用形状比较简单的矩形结构来分析, 见图 9.6, 其中 Λ 为光栅周期, L 为光栅长度。

定义光栅矢量 \vec{K} , 它是一个在光栅平面内与光栅线垂直的矢量, 其大小 $K = 2\pi / \Lambda$, 为光栅的空间频率。通常介质周期性的起伏很小, 可作为微扰处理。根据模耦合理论, 将除去光栅的结构为基准波导, 折射率用 $n_0(x, y)$ 表示, 介质微扰变化部分用 $\Delta n^2(x, y, z)$ 表示, 该值在光栅以外区域为 0。

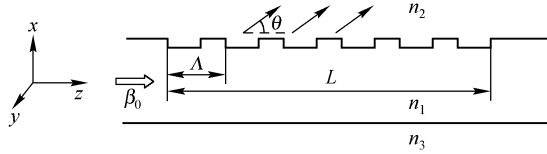


图 9.6 起伏型波导光栅

由于 $\Delta n^2(x, y, z)$ 是周期函数, 因此在光栅内部可以将其按傅里叶级数展开为

$$\Delta n^2(x, y, z) = \sum_q a_q(x, y) e^{-iqK \cdot z} \quad (9.2-1)$$

式中, q 为任意整数。设从光栅辐射出去的模式或射入光栅的模式为

$$\vec{E}_\mu(x, y, z, t) = \vec{e}_\mu(x, y) e^{-i\beta_\mu z} e^{i\omega t} \quad (9.2-2)$$

波导光栅中传播的模式为

$$\vec{E}_\nu(x, y, z, t) = \vec{e}_\nu(x, y) e^{-i\beta_\nu z} e^{i\omega t} \quad (9.2-3)$$

为简单起见, 假设电场和磁场有相同的展开系数, 将上面三式代入模耦合方程式(8.2-8), 就可以得到波导光栅的模耦合方程。

$$\frac{da_\mu(z)}{dz} = \sum_q \sum_\nu K_{\mu\nu}^q a_\nu(z) e^{-i(\beta_\nu + qK - \beta_\mu)z} \quad (9.2-4)$$

注意对 ν 的求和, 辐射模也含在其中, 而与 z 无关的耦合系数表达式为

$$K_{\mu\nu}^q = \frac{1}{2} (K_{\mu\nu}^{(1)q} + K_{\mu\nu}^{(2)q}) \quad (9.2-5)$$

$$K_{\mu\nu}^{(1)q} = \frac{\omega \epsilon_0}{2i} \iint a_q(x, y) \vec{e}_{\mu t}^* \cdot \vec{e}_{\nu t} dx dy \quad (9.2-6)$$

$$K_{\mu\nu}^{(2)q} = \frac{\omega \epsilon_0}{2i} \iint a_q(x, y) \vec{e}_{\mu z}^* \cdot \vec{e}_{\nu z} dx dy \quad (9.2-7)$$

β_μ 、 β_ν 、 K 都是 $2\pi/\lambda$ 数量级，当光栅长度 $L \gg \Lambda$ 时， $e^{-i(\beta_\nu - \beta_\mu + qK)z}$ 为一个迅速变化的周期性函数。由于 $\Delta n^2(x, y, z)$ 呈微扰变化，所以 $a_q(x, y)$ 为一微小量值。考虑上述因素，为得到方程式 (9.2-4) 的解 (通过沿 z 方向积分)，并使 $a_\mu(z)$ 达到一定数值，即有功率传递，必须有

$$\beta_\mu - \beta_\nu = qK = q2\pi/\Lambda \quad (q=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (9.2-8)$$

即两波若产生耦合，它们在 z 方向的传播常数一定满足该式，这是一个重要结论，称为相位匹配条件。

严格地分析，上式应该是一个矢量式

$$\vec{\beta}_\mu - \vec{\beta}_\nu = q\vec{K} \quad (q=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (9.2-9)$$

由于光栅的周期性质，光栅下面区域的波导模式会受到微扰，其相位受到周期性的调制，使每个模式 $\vec{\beta}_\nu$ 产生一组空间谐波 $\vec{\beta}_\nu + q\vec{K}$ ， q 称为谐波阶数。当空间高次谐波的传输常数矢量能够允许在光栅结构内传输时，它实际上是作为模在结构内传输的，基阶谐波等同于没有光栅的波导的特定模式。为了使两个可以用传输矢量 $\vec{\beta}_\mu$ 和 $\vec{\beta}_\nu$ 表示的光波能够耦合，这两个光波必须具有式 (9.2-9) 的关系。

以图 9.6 中的光波为例，为使在波导光栅中的模式 β_0 与覆盖层中平面波形式的辐射模耦合，按照相位匹配条件，必须有 $\beta_0 - n_2 k_0 \cos \theta = 2\pi q / \Lambda$ 。这使我们确定任何波导光栅耦合器的入射角或辐射角；反之当 θ 给定时，可求得光栅的周期 Λ 。可见，耦合只能发生在 q 次谐波上，而耦合强度与 a_q 有关。

此外，在二维波导内，由于波导光在波导平面内可以沿任意方向传输，因此利用适当方位的光栅可以产生不同传输方向的波导之间的耦合，因为参与这种相互作用的光波全部都在波导平面内传输，所以称之为共面耦合。这种伴随着传输方向变化的耦合称为衍射，如图 9.7 和图 9.8 所示。对这种波导衍射光栅，可定义参数

$$Q = K^2 L / \beta \quad (9.2-10)$$

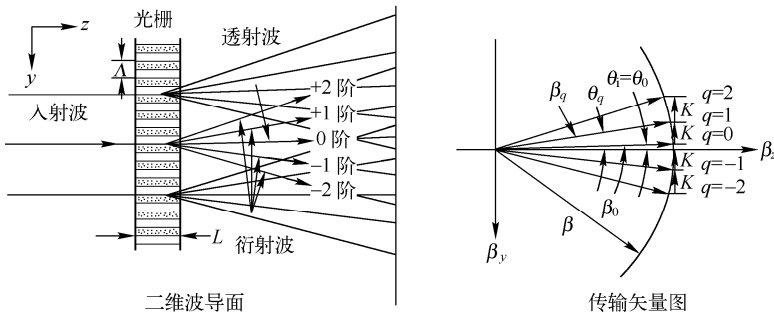


图 9.7 波导光栅的拉曼-纳斯衍射

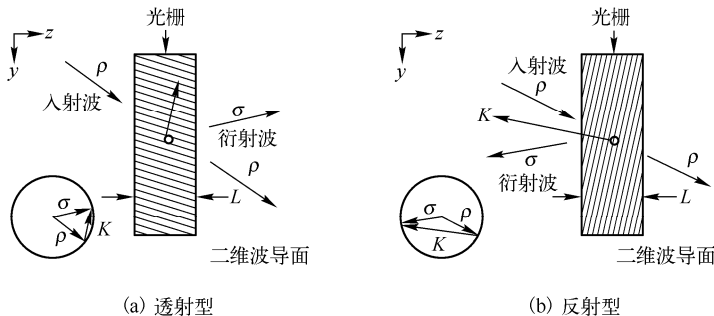


图 9.8 波导光栅的布拉格衍射

这是一个表示光栅周期 Λ 与长度 L 之间关系的参量,当 $Q \ll 1$ 时的衍射称为拉曼-纳斯衍射(Raman-Nath diffraction);当 $Q \gg 1$ 时的衍射为布拉格衍射(Bragg diffraction)。

上述分析只得到一些定性的结论,为得到定量的结果,还需根据具体的波导光栅,解模耦合方程,做进一步的分析计算。

9.3 双波导定向耦合器

如图 9.9(a)所示,当波导 I 与波导 II 的间距远大于波导的横向穿透深度时,两个波导都可以看成是正规波导,其中的模场以各自的传播常数独立传输。然而,当两个波导某部分间距较小,如图 9.9(b)所示时,波导折射率分布发生了改变,一个波导中的场将受到另一个波导中的场的影响,引起两个波导中的导模相互耦合。原来只在波导 I 中传输的光功率经过耦合区域,一部分甚至全部将会转移到波导 II 中。耦合特性由波导间距、耦合段长度及传播模式决定。这种横向的电磁场耦合,可以构成有用的光耦合元件,它是对光信号实现分路、合路、插入和分配的无源器件。光信号的耦合机理随耦合器的种类而异。平行的邻近波导间的功率交换,称为定向耦合。图 9.9(b)实际就是简单的条型波导定向耦合器的结构简图。当然,这种横向耦合有时也可能带来有害的干扰,如光纤间的信号串扰、模式噪声、模式耦合损耗等,这时需要加以避免。

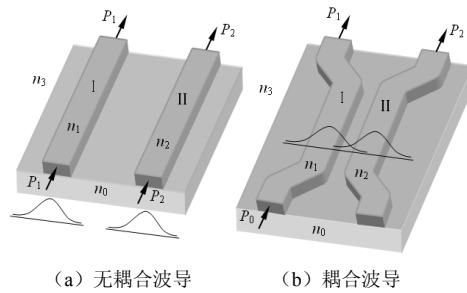


图 9.9 波导的定向耦合

设波导 I 单独存在时的场为 \vec{E}_1 和 \vec{H}_1 , 波导 II 单独存在时的场为 \vec{E}_2 和 \vec{H}_2 , 如果两个波导都是单模传输的, 则理想波导 I 和 II 中的光波场可写作

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_1(x, y)e^{-i\beta_1 z}, \quad \vec{H}_1 = \vec{H}_1(x, y)e^{-i\beta_1 z}$$

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_2(x, y)e^{-i\beta_2 z}, \quad \vec{H}_2 = \vec{H}_2(x, y)e^{-i\beta_2 z}$$

如果是多模波导, 则波导中的场为全部可传输模式的完备组合。

两个波导同时存在时, 严格解应该是将双波导作为一个统一的耦合波导系统, 求解总的电磁场边值问题, 通常只能进行数值求解, 比较复杂。但当耦合较弱时, 发生相互耦合的波导区域的场分布可以近似表示为两个单独波导中的场的组合叠加, 即

$$\vec{E}_t = A_1(z)\vec{E}_{1t} + A_2(z)\vec{E}_{2t} \quad (9.3-1)$$

$$\vec{H}_t = A_1(z)\vec{H}_{1t} + A_2(z)\vec{H}_{2t} \quad (9.3-2)$$

下角标 t 表示横场分量。由于波导间互相影响, 组合系数 $A_1(z)$ 和 $A_2(z)$ 作为两波导中横场的叠加系数, 随 z 而变化。这里电场和磁场用相同的叠加系数, 是为简单起见, 假定各波导内传播的场保持单一模式。

总场还可以表示为

$$\vec{E}_t = a_1(z)\vec{E}_{1t}(x, y) + a_2(z)\vec{E}_{2t}(x, y) \quad (9.3-3)$$

$$\vec{H}_t = a_1(z)\vec{H}_{1t}(x, y) + a_2(z)\vec{H}_{2t}(x, y) \quad (9.3-4)$$

其中

$$a_1(z) = A_1(z)e^{-i\beta_1 z} \quad (9.3-5)$$

$$a_2(z) = A_2(z)e^{-i\beta_2 z} \quad (9.3-6)$$

利用电磁场基本方程和模耦合方程式(8.2-8)，在只有两个导模的情况下，并设 $a_\mu = b_\mu$ ，可得到模式的横向耦合方程

$$\frac{da_1(z)}{dz} = -i\beta_1 a_1(z) - iK_{11}a_1(z) - iK_{12}a_2(z) \quad (9.3-7a)$$

$$\frac{da_2(z)}{dz} = -i\beta_2 a_2(z) - iK_{22}a_2(z) - iK_{21}a_1(z) \quad (9.3-7b)$$

或者用 A_1 、 A_2 表示为

$$\frac{dA_1(z)}{dz} = -iK_{11}A_1(z) - iK_{12}A_2(z)e^{-i(\beta_2 - \beta_1)z} \quad (9.3-8a)$$

$$\frac{dA_2(z)}{dz} = -iK_{22}A_2(z) - iK_{21}A_1(z)e^{i(\beta_2 - \beta_1)z} \quad (9.3-8b)$$

其中 K_{12} 、 K_{21} 为耦合系数， K_{11} 、 K_{22} 称为自耦系数。对于图 9.9(b) 中的耦合波导，波导 II 区的折射率 n_2 看成是对波导 I 的覆盖层折射率 n_3 的微扰的结果，所以有

$$K_{11} = \frac{\omega\epsilon_0}{2} \iint_{S_2} (n_2^2 - n_3^2) \vec{E}_{1t}^* \cdot \vec{E}_{1t} dx dy \quad (9.3-9)$$

$$K_{12} = \frac{\omega\epsilon_0}{2} \iint_{S_2} (n_2^2 - n_3^2) \vec{E}_{1t}^* \cdot \vec{E}_{2t} dx dy \quad (9.3-10)$$

S_2 为波导 II 的芯区截面。同样，将波导 I 区的折射率 n_1 看成是对波导 II 的覆盖层折射率 n_3 的微扰的结果，由此可给出 K_{22} 、 K_{21} 的表示式

$$K_{22} = \frac{\omega\epsilon_0}{2} \iint_{S_1} (n_1^2 - n_3^2) \vec{E}_{2t}^* \cdot \vec{E}_{2t} dx dy \quad (9.3-11)$$

$$K_{21} = \frac{\omega\epsilon_0}{2} \iint_{S_1} (n_1^2 - n_3^2) \vec{E}_{2t}^* \cdot \vec{E}_{1t} dx dy \quad (9.3-12)$$

S_1 为波导 I 的芯区截面。对于无损耗波导，可以证明 $K_{12} = K_{21}^*$ 。

如果令

$$A_1(z) = A_{10}(z)e^{-iK_{11}z} \quad (9.3-13a)$$

$$A_2(z) = A_{20}(z)e^{-iK_{22}z} \quad (9.3-13b)$$

代入方程式(9.3-8)，则可得到 $A_{10}(z)$ 和 $A_{20}(z)$ 满足的方程为

$$\frac{dA_{10}(z)}{dz} = -iK_{12}A_{20}(z)e^{-i2\delta z} \quad (9.3-14a)$$

$$\frac{dA_{20}(z)}{dz} = -iK_{21}A_{10}(z)e^{i2\delta z} \quad (9.3-14b)$$

其中

$$2\delta = \beta_2 - \beta_1 + K_{22} - K_{11} \quad (9.3-15)$$

δ 称为相位失配因子。为求解上述形式的模耦合方程，可进一步令

$$A_{10}(z) = R(z)e^{-i\delta z} \quad (9.3-16a)$$

$$A_{20}(z) = S(z)e^{i\delta z} \quad (9.3-16b)$$

代回方程式(9.3-14)，得到波导 I、II 中的光波振幅系数分别为

$$R(z) = C_1 \cos\left(\sqrt{\delta^2 + K_{12}K_{21}z}\right) + D_1 \sin\left(\sqrt{\delta^2 + K_{12}K_{21}z}\right) \quad (9.3-17a)$$

$$S(z) = C_2 \cos\left(\sqrt{\delta^2 + K_{12}K_{21}z}\right) + D_2 \sin\left(\sqrt{\delta^2 + K_{12}K_{21}z}\right) \quad (9.3-17b)$$

如果考虑初始条件，设两个波导耦合前在 $z=0$ 处输入光波的振幅系数分别为 R_0 和 S_0 ，则有 $A_1(0) = A_{10}(0) = R(0) = R_0$ ， $A_2(0) = A_{20}(0) = S(0) = S_0$ ，据此可以确定积分常数如下

$$C_1 = R_0 \quad (9.3-18a)$$

$$C_2 = S_0 \quad (9.3-18b)$$

$$D_1 = i \frac{\delta R_0 - K_{12}S_0}{\sqrt{\delta^2 + K_{12}K_{21}}} \quad (9.3-18c)$$

$$D_2 = -i \frac{\delta S_0 + K_{21}R_0}{\sqrt{\delta^2 + K_{12}K_{21}}} \quad (9.3-18d)$$

那么波导 I、II 中传输的光功率分别为

$$P_1(z) = |R(z)|^2 \quad (9.3-19a)$$

$$P_2(z) = |S(z)|^2 \quad (9.3-19b)$$

进一步的具体分析表明，光波在有耦合作用的两个波导中传输时，功率在波导 I、II 之间周期性交换，而总传输功率守恒。假设光只从波导 I 输入， $S_0 = 0$ ，则

$$P_1(z) = R_0^2 \left[\cos^2\left(\sqrt{\delta^2 + K_{12}K_{21}z}\right) + \frac{\delta^2}{\delta^2 + K_{12}K_{21}} \sin^2\left(\sqrt{\delta^2 + K_{12}K_{21}z}\right) \right] \quad (9.3-20a)$$

$$P_2(z) = \frac{R_0^2 K_{12}K_{21}}{\delta^2 + K_{12}K_{21}} \sin^2\left(\sqrt{\delta^2 + K_{12}K_{21}z}\right) \quad (9.3-20b)$$

当耦合波导长度 $z = L$ 满足

$$\sin^2\left(\sqrt{\delta^2 + K_{12}K_{21}L}\right) = 1 \quad (9.3-21)$$

时，波导 II 输出功率最大，波导 I 输出功率最小。

若两个波导是完全相同的单模波导，则 $K_{11} = K_{22}$ ， $K_{12} = K_{21} = K$ ，均为实数，这时 $\delta = 0$ 为相位匹配状态，则有 $P_1(L) = 0$ ， $P_2(L) = R_0^2$ ，即波导 I 的功率全部耦合到波导 II 中，这种情况称为完全耦合或理想耦合，如图 9.10(a) 所示。由式 (9.3-21) 可知完全耦合时

$$L = (2m+1) \frac{\pi}{2K} \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (9.3-22)$$

$L_0 = \pi/(2K)$ 称作耦合长度，波导耦合区长度是耦合长度的奇数倍时，功率转移率最大。图 9.10(b) 示出了在相位失配情况下的波导耦合，两个波导中的模功率不能实现完全交换。

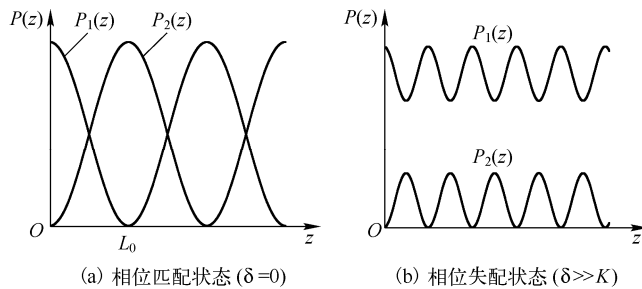


图 9.10 两个耦合波导中模功率的变化

通常，仅当两个波导具有相同模式或两个模式传播常数相近时才能产生有效的耦合。两个

波导模式相同时，耦合系数 K 只影响耦合长度的大小，而与最大功率转移率无关，转移率为 100%。有时，为了满足所要求的各波导中的功率分配比例，需要适当选择波导长度。

9.4 波分复用/解复用器

波分复用(WDM: Wavelength Division Multiplexing)技术主要是将发送端的多路光信号组合起来(复用)，并耦合到同一根光纤中进行同时传输；在接收端再将组合的光信号分开(解复用)，恢复原信号送至不同的客户终端，如图 9.11 所示。波分复用/解复用器(简称复用/解复用器)的共同要求是具有足够多的复用信道、插入损耗低、串音干扰小和通带范围宽等特点。

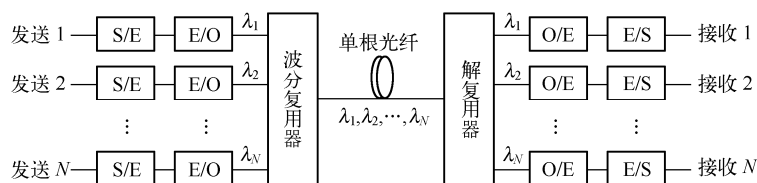


图 9.11 波分复用/解复用系统

由于光波的频率在 10^{14} Hz 量级，用光作为载体进行信息传输，具有巨大的带宽。所以对多个信道的光信号进行调制并耦合到一根光纤中传输，既有效利用了光纤的巨大带宽，又能显著增加信息传输的容量，并可以提高网络使用的灵活性。如图 9.11 所示，设发送端有 N 个信道的音频(或视频，以音频为例)信号，分别经声(S)/电(E)转换变为 N 个电信号，再经电(E)/光(O)转换(调制)为 N 个具有不同波长(频率)的光信号。这些光信号则由波分复用器耦合到一根光纤中进行传输。在接收端，解复用器再将 N 路光信号分开，各自经过光/电、电/声等转换，发送给不同的接收端。可以看出，波分复用器和解复用器是光波分复用系统中的关键器件。

复用器和解复用器的组成原理是相同的，仅是由于输入、输出的方向不同，在实际的设计中两者略有差异。复用器的输出是与传输光纤耦合的，由于传输光纤的芯径和数值孔径较小，因此插入损耗较大。而解复用器则直接与光检测器相连，芯径与数值孔径可以做得大些，这样既可以减小损耗，又可以降低加工精度要求，因此加工低插入损耗的解复用器并不太难。

复用器和解复用器又可分为有波长选择性和非波长选择性两种。非波长选择性的只有少数情况下做合路器用；有波长选择性的既可作为光解复用器也可作为光复用器。解复用器要把各种不同波长的光分开，所以必须采用有波长选择性的无源器件。

另外，光作为信息载体，可以按波长调制，也可以按频率调制。众所周知，电磁波的频率与波长是一一对应的，因此，光波分复用与光频分复用(FDM: Frequency Division Multiplexing)没有本质的差异。简单而言，对于大的光载波间隔(如频率间隔为 20 000GHz，约 0.1 μ m 的波长间隔)被称为波分复用，适用于光信道排列稀松的情况(一般为 10 个信道以下)；而对于较窄的光载波间隔(如频率间隔为 5GHz，约 0.04nm 的波长间隔)被称为频分复用，适用于光信道排列紧密的情况。

波分复用器件有多种形式，本节主要从分光原理方面介绍角色散型、干涉型、F-P 腔光滤波型复用器，以及阵列波导光栅复用器。

9.4.1 角色散型

色散或色散效应指的是一种介质的折射率随波长(频率)而改变的现象，可以理解为折射

率是波长(频率)的函数, 如下面的 Cauchy 公式(9.4-1)或 Hartmann 公式(9.4-2)给出的经验描述

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} + \dots \quad (9.4-1)$$

$$n = n_0 + \frac{C}{\lambda - \lambda_0} \quad (9.4-2)$$

式中, n 为折射率, λ 为光波长, A 、 B 、 C 为取决于介质的系数。从上述两个式子可以看出, 随着波长的增大, 折射率减小, 这是正常色散; 反之则为反常色散。

棱镜是最早被使用的色散型波分复用器件。图 9.12 所示为棱镜型波分复用器的示意图。从光纤传来的、含有 N 个波长的多信道光信号同时输入到棱镜, 由于色散效应, 不同波长的光信号折射率不同, 经过棱镜的光程也不同, 导致各个光信号的出射角 θ 发生变化。简言之, 棱镜将不同波长的输入光信号分开, 并按不同方向输出, 进入到不同的接收端。

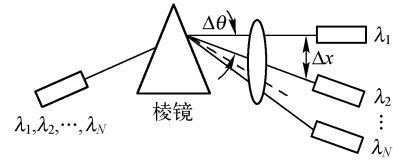


图 9.12 棱镜型波分复用器示意图

通常用角色散本领和角分辨本领两个指标来表征角色散器件的性能。其中, 角色散本领定义为:

$$D_\theta = d\theta / d\lambda \quad (9.4-3)$$

上式给出的是在单位波长间隔内光波散开的角度。如图 9.12 所示, 也可用线色散本领表征, 即在单位波长间隔内光波在输出端产生的线分离, 有

$$D_x = \frac{dx}{d\lambda} = f d\theta / d\lambda = f D_\theta \quad (9.4-4)$$

式中, f 为透镜的焦距。

角(线)色散本领给出了不同波长光信号谱线中心的分离程度。如果发送端两个相邻波长光信号的谱线中心间隔 $\Delta\lambda$ 较大, 则色散后这两个光信号的谱线可以明显分开, 如图 9.13(a) 所示; $\Delta\lambda$ 若很小, 色散后的两个光信号的谱线则无法区分, 如图 9.13(b) 所示; 在接收端, 当一个谱线的最小值位置与另一个谱线的最大值位置一致时, 是两条谱线刚好能分辨的极限, 此为 Rayleigh 分辨判据, 如图 9.13(c) 所示。换句话说, 谱线的半角宽度 $\Delta\theta_0$ 就是两条谱线刚好能分辨的极限。故光学器件能够分辨的最小波长差是:

$$\Delta\lambda_{\min} = \Delta\theta_0 / D_\theta \quad (9.4-5)$$

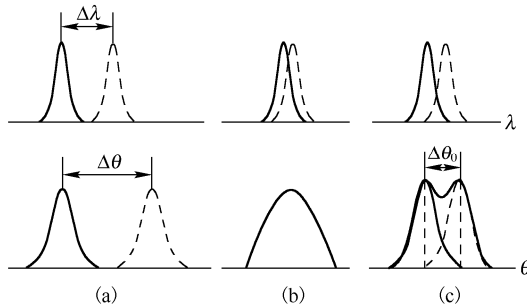


图 9.13 Rayleigh 分辨判据示意图

分辨本领是表征器件分辨谱线能力的重要指标。光学器件的分辨本领定义为:

$$R \equiv \lambda / \Delta\lambda_{\min} \quad (9.4-6)$$

综上, 信道间的波长间隔应远大于器件可分辨的最小波长差, 这样才能更好地避免信道间

的串扰。

棱镜作为波分复用器件，结构简单，价格低廉。典型指标为：波长间隔约 20nm，插入损耗约 5dB，串音隔离度优于 30dB。然而，棱镜的体积和质量较大，色散系数又较小，波长与出射角度呈非线性关系，不利于调节。相比而言，光栅作为波分复用器件则更有优势。

图 9.14 为光栅型解波分复用器的原理示意图。从前端来的含各波长的光信号被透镜 1 准直后照射到透射光栅。光栅可以将各个波长的光信号分开，并按不同的出射角 θ 出射，再由透镜 2 聚焦后，送至不同的接收端。

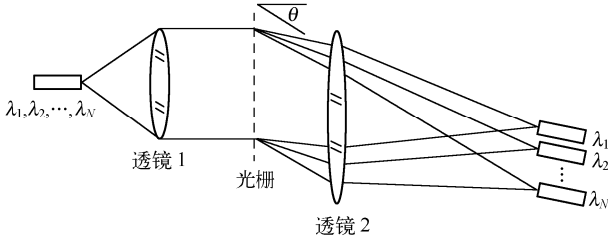


图 9.14 光栅型解波分复用器的原理示意图

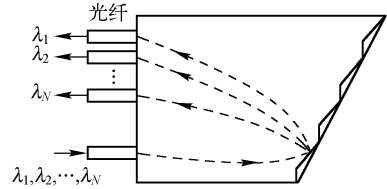


图 9.15 自聚焦、反射光栅型解波分复用器示意图

由光栅方程

$$d \sin \theta = k \lambda \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (9.4-7)$$

可知， d 一定时，波长 λ 不同，主极大衍射角 θ 也不同。波长越大，衍射角也就越大；选择常数 d 更小的光栅，则不同波长光信号衍射角的差别更明显。光栅的分辨本领 $R=kN$ ， k 是衍射级次， N 为光栅刻痕总数。因此选择 N 大的光栅，在光栅衍射的高级次上更容易将信号光分开。

图 9.15 为实际应用的一种光栅型解波分复用器的示意图，它将图 9.14 中的透射光栅改为闪耀式反射光栅，同时省略了玻璃透镜，取而代之的是具有自聚焦效应的非线性晶体或渐变折射率透镜。相比之下，后者节省空间，体积减小，更利于集成化。

9.4.2 干涉型

干涉型 WDM 主要有两种形式：马赫-曾德尔 (Mach-Zahnder) 滤波器型和干涉膜型。

1. Mach-Zahnder 滤波器型

Mach-Zahnder 滤波器，简称 M-Z 滤波器，又可称为 M-Z 干涉仪，用作光调制器和光滤波器。M-Z 滤波器既有分立器件形式，也有光纤或光波导集成形式。

图 9.16 为波导 M-Z 滤波器型波分解复用器的原理示意图，DC₁、DC₂ 是分光比为 1:1 的定向耦合器，在它们之间是长度不等的光波导臂，长度分别是 l_1 、 l_2 ，差值为 $\Delta l = l_1 - l_2$ 。①、②为输入端，③、④为输出端。

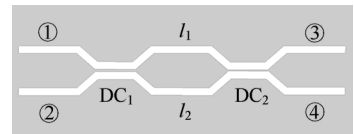


图 9.16 M-Z 滤波器型复用器示意图

设电场强度为 E_1 的光信号由①端输入，依次经 DC₁ 直通臂、波导段 l_1 和 l_2 、DC₂ 直通臂输出到③、④端，输出电场强度为 E_3 、 E_4 。可得 E_3 、 E_4 与 E_1 的关系为

$$\begin{bmatrix} E_3 \\ E_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{1-C} & -i\sqrt{C} \\ -i\sqrt{C} & \sqrt{1-C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-ik_0 n l_1} & 0 \\ 0 & e^{-ik_0 n l_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{1-C} & -i\sqrt{C} \\ -i\sqrt{C} & \sqrt{1-C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9.4-8)$$

式中， $C=0.5$ ，是耦合率。 $\begin{bmatrix} \sqrt{1-C} & -i\sqrt{C} \\ -i\sqrt{C} & \sqrt{1-C} \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} e^{-ik_0 n l_1} & 0 \\ 0 & e^{-ik_0 n l_2} \end{bmatrix}$ 分别为定向耦合器的传输矩阵和

波导的传输矩阵。从式(9.4-8)可以得到

$$E_3 = [(1-C)e^{-ik_0nl_1} - Ce^{-ik_0nl_2}]E_1, \quad E_4 = -i\sqrt{C(1-C)}(e^{-ik_0nl_1} + e^{-ik_0nl_2})E_1 \quad (9.4-9)$$

由于光功率与电场的关系为 $P \propto E \cdot E^*$ ，故若①端输入功率为 P_1 ，进一步计算可得③、④端的输出功率分别为

$$P_3 = \sin^2\left(\frac{k_0n\Delta l}{2}\right)P_1 = \sin^2\left(\frac{\pi n\Delta l}{\lambda}\right)P_1, \quad P_4 = \cos^2\left(\frac{k_0n\Delta l}{2}\right)P_1 = \cos^2\left(\frac{\pi n\Delta l}{\lambda}\right)P_1 \quad (9.4-10)$$

定义 $B_{ij}=P_{oj}/P_i$ 为传输系数(其中, P_i 为第 i 个信道输入的光功率, P_{oj} 为第 j 个输出端的光功率), 则

$$B_{13} = \sin^2\left(\frac{\pi n\Delta l}{\lambda}\right), \quad B_{14} = \cos^2\left(\frac{\pi n\Delta l}{\lambda}\right) \quad (9.4-11)$$

传输系数 B_{13} 和 B_{14} 随波数的变化如图 9.17 所示。结果表明, 如果①端输入两个波长分别为 λ_1 和 λ_2 的光信号, 当选择合适的光波导长度差 Δl 时, 两个波长的光信号可以各自从③端和④端输出, 即滤波器使一个波长光反射, 而让另一个波长光通过, 实现了两个波长光信号的分离(或分接), 达到了波分复用的目的。

一级 M-Z 光滤波器只能分开两个不同波长的光信号, 要实现多个波长光信号的分离, 可以在一个硅基片上制作多级集成式的 M-Z 光滤波器。图 9.18 所示为由三个 M-Z 光滤波器组成两级串、并联结构, 可以分离四个不同的波长。可以想象, 更多 M-Z 光滤波器集成在一起所构成的波分复用器件无疑具有很高的波长选择性。

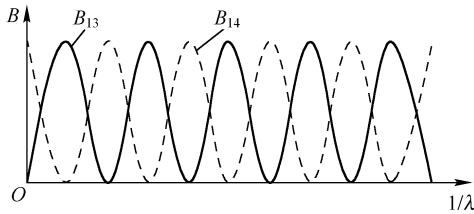


图 9.17 M-Z 滤波器随波数的变化

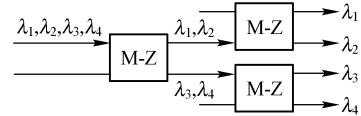


图 9.18 两级 M-Z 光滤波器示意图

2. 干涉膜型

干涉膜型解波分复用器的关键器件为干涉滤光片, 它是在透明基片上, 按一定规律交替蒸发 SiO_2 (折射率为 1.46) 和 TiO_2 (折射率为 2.3) 两种材料而形成的多层薄膜。

以一层薄膜干涉为例, 说明干涉膜滤光片原理。薄膜的折射率关系如图 9.19 所示。当入射光 A_i 以 α 角度入射到薄膜表面后, 一部分光被分振幅反射, B_1, B_2, \dots ; 另一部分光发生折射后透射出薄膜, A_1, A_2, \dots 。若薄膜厚度为 d , 折射角为 β , 则相邻透射光线(如 A_1 和 A_2)之间的光程差为

$$\Delta L = (BC + AB)n = \left(\frac{d}{\cos \beta} + d \frac{\cos 2\beta}{\cos \beta}\right)n = 2nd \cos \beta \quad (9.4-12)$$

$$\text{相位差为} \quad \delta = k \cdot \Delta L = \frac{4\pi nd}{\lambda} \cos \beta \quad (9.4-13)$$

当相位差为 $2m\pi$ ($m=1, 2, \dots$) 时, A_1, A_2 相干相长, 形成强的透射波。还可以看到, 相位差与波长有关。不同的输入波长, 透射光出射的方向各异。因此, 可以将混在一起的不同波长的入射光信号分开, 如图 9.20 所示。

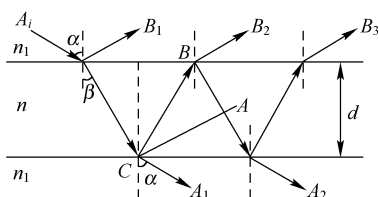


图 9.19 薄膜界面上光的反射和透射

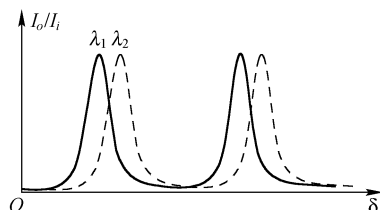


图 9.20 薄膜透射的波长选择

为提高分辨本领，往往采用折射率交替变化的多层薄膜作为干涉型复用器，多层薄膜的反射和透射如图 9.21 所示。多束反射光形成的干涉，可使图 9.20 中谱线的半值宽度变得更窄，提高了分辨本领，并在一定的带宽内能够同时传输更多信道的光信号。

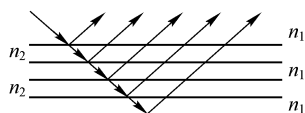


图 9.21 多层薄膜的反射和透射

9.4.3 F-P 腔光滤波型

F-P 腔是 Fabry-Pérot 首先发明的，其结构如图 9.22 所示，主要由两块镀有高反射系数 (\$r_1\$、\$r_2\$ 大)、低透射系数 (\$t_1\$、\$t_2\$ 小) 的平面镜 \$M_1\$ 和 \$M_2\$ 组成。若两镜之间距离 \$d\$ 不变，称之为 F-P 腔或 F-P 干涉具；若两镜之间距离 \$d\$ 可以改变，则称之为 F-P 干涉仪。当一束光 \$A_i\$ 输入后，光线在两反射镜间产生多次反射，输出多束光 \$A_1, A_2, \dots\$。两相邻输出光线间的光程差/相位差相同。实际上，F-P 腔光滤波型波分复用器的物理原理也是干涉效应，即输出的多光束经透镜聚光后，形成多光束干涉。

设输入光的复振幅 \$A_i\$ 以透过系数 \$t_1\$ 穿越 \$M_1\$ 镜进入到 F-P 干涉腔。在 \$M_2\$ 镜处振幅分为两部分：一部分以透过系数 \$t_2\$ 输出到 F-P 干涉腔外，另一部分以反射系数 \$r_2\$ 反射回 \$M_1\$ 镜。如此反复，输出到 F-P 干涉腔外有 \$A_1, A_2, \dots\$ 多个光束。每一个光束比前一个光束有 \$\delta=2ndk_0\$ 的相位延迟，且振幅依次减弱，令

$$H = r_1 r_2 \exp(-i\delta) \quad (9.4-14)$$

$$\text{则 } A_1 = A_i t_1 t_2, A_2 = H A_1, A_3 = H^2 A_1, \dots \quad (9.4-15)$$

透射光总的复振幅为各透射光振幅的叠加

$$\begin{aligned} A_o &= A_1 + A_2 + A_3 + \dots = A_1(1 + H + H^2 + \dots) \\ &= \frac{A_1}{1-H} = \frac{A_i t_1 t_2}{1-H} \end{aligned} \quad (9.4-16)$$

技术上常选择反射系数 \$r_1=r_2=r\$，透射系数 \$t_1=t_2=t\$，则光的反射率和透射率分别为 \$R=r^2\$，\$T=t^2\$，并有 \$R+T=1\$。透射光的复振幅为

$$A_o = \frac{A_i T}{1 - R \cdot \exp(-i\delta)} \quad (9.4-17)$$

$$\begin{aligned} \text{透射光强为 } I_o &= K A_o A_o^* = \frac{K A_i A_i^* T^2}{|1 - R \exp(-i\delta)|^2} \\ &= \frac{I_i T^2}{(1-R)^2 + 4R \sin^2 \frac{\delta}{2}} \end{aligned} \quad (9.4-18)$$

将 \$\delta=4\pi nd/\lambda\$ 带入上式，并定义功率传输系数 \$B=I_o/I_i\$，则

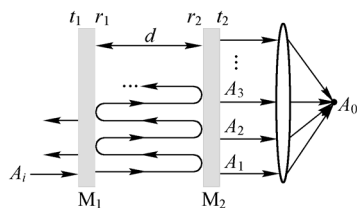


图 9.22 F-P 腔光滤波器结构

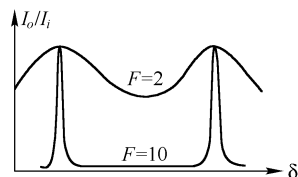


图 9.23 透射多光束干涉的光强分布

$$B = \frac{1}{1 + \left(\frac{2F}{\pi}\right)^2 \sin^2 \frac{2\pi nd}{\lambda}} \quad (9.4-19)$$

式中, $F = \pi\sqrt{R}/(1-R)$ 。从上式可以看出:

(1) 功率传输系数 B 是 $F(R)$ 的函数, 从图 9.23 的数值模拟结果可以看出, F 越大, 谱线的半值宽度越小, 谱线越尖锐。

(2) 功率传输系数 B 也是输入波长的函数, 不同的输入波长, 峰值的位置不同(见图 9.20), 即通过 F-P 干涉腔可以将有多个波长组成的输入信号按不同的峰值位置分开, 达到解波分复用的目的。

9.4.4 阵列波导光栅

阵列波导光栅(AWG: Arrayed Waveguide Grating)是正在迅速发展的密集波分复用(DWDM)光网络的关键器件之一。AWG 是一种角色散型无源器件, 属于平面光波导器件的一种。它具有良好的滤波特性, 由于具有集成度高的特点, 可以实现数十个至几百个波长的复用和解复用。AWG 还可以实现光交叉互连、光分插复用等功能。另外, 它尺寸小、插入损耗小、成本低、性能长期稳定。

如图 9.24 所示, AWG 包含输入和输出波导、两个聚焦平板波导, 以及相邻波导间具有固定光程差的相控阵列波导五个部分。在 AWG 中, 给多个通道光波导加上一定的长度差, 靠其在输出端的干涉效应实现每个波长在角度上的分离。它工作在高阶衍射区, 对波长的分辨率达到纳米数量级。

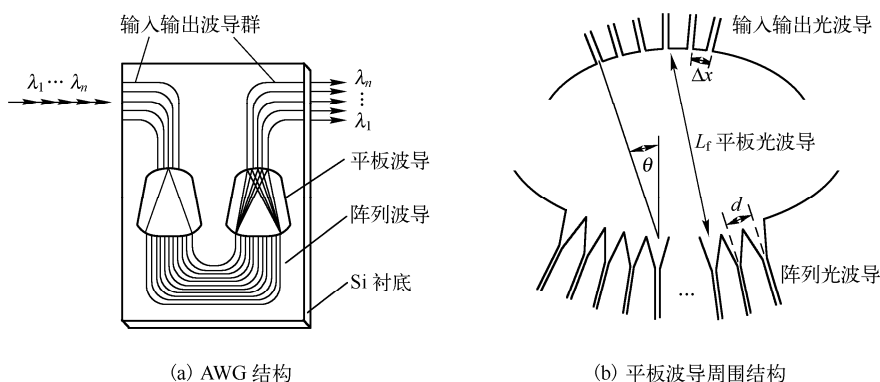


图 9.24 AWG 复用/解复用器

扇形平板波导区的结构如图 9.24(b)所示, 在距输入输出波导群 L_f 处的圆弧上排列阵列波导群。平板波导的曲率中心处在输入输出波导群的中央波导的一端, 配置阵列波导成辐射状, 使其光轴通过曲率中心。当一束混合了 N 个通道光波的复用光从一个输入波导射入平板波导时, 因衍射而扩展, 以等相位差耦合进阵列波导。阵列波导由很多相互分离的长度依次递增的通道波导构成, 各波导间的长度差为 ΔL 。光到达第二个平板耦合波导时, 各阵列波导输出的光依次产生相位延迟, 从而引起干涉效应, 产生波长色散。

设输入和输出波导间距均为 Δx , 阵列波导间距为 d , 曲率半径为 L_f , 平板波导的有效折射率为 n_s , 阵列波导的有效折射率为 n_c , 则由相位匹配条件, 得到光栅方程为

$$n_s d \sin \theta_i + n_c \Delta L + n_s d \sin \theta_o = m \lambda \quad (9.4-20)$$

式中, $\theta_i = i\Delta x/L_f$ 和 $\theta_o = j\Delta x/L_f$ 为输入和输出平板波导的衍射角(i 和 j 分别为输入和输出波导

序号), λ 为光波长, m 为光栅的衍射阶次。设 WDM 系统的中心波长为 λ_0 , 当 $\theta=0$ 时, 则 $n_c \Delta L = m \lambda_0$ 。

用频率 f 代替波长, 由式 (9.4-20) 对 f 微分可得角色散本领 $d\theta/df$ 。 θ_0 非常小时可由下式表示

$$d\theta_0/df = -m\lambda^2 n_g / (n_c n_s d c) \quad (9.4-21)$$

其中

$$n_g = n_c - \lambda(dn_c/d\lambda) \quad (9.4-22)$$

为通道波导的群折射率(不考虑平板波导的色散效应), c 是真空中光速。参考图 9.24 的结构, 由 $\Delta\theta = (d\theta_0/df)\Delta f$, 可推出解复用器通道间隔频率

$$\Delta f = \Delta x / (L_f m \lambda^2 n_g / n_c n_s d c) \quad (9.4-23)$$

可见, 对于某指定输入端口输入的多波长复合信号, 将被分解至不同的输出端口进行输出, 实现多波长复合信号的分接。

若 $\Delta\lambda$ 为相邻通道之间的波长间隔, 相邻波导之间要求的路径差由下式给出

$$\Delta L = (n_s d \Delta x \lambda_0) / (n_g L_f \Delta \lambda) \quad (9.4-24)$$

为了保证每个通道的独立, 避免串扰, 有必要使用阵列波导的同一阶空间色散, 这就限制了它的空间范围和可能的通道数 N_{ch} 。同一波长第 m 阶和第 $m+1$ 阶聚焦光束的空间分离距离为 $\lambda_0 L_f / (n_s d)$, 所以有效的波长通道数为

$$N_{ch} = \lambda_0 L_f / (n_s d \Delta x) \quad (9.4-25)$$

通过适当地选择阵列波导的长度和间隔, 可以比较自由地设计 AWG 的性能。利用硅系半导体、聚合物材料等已经实现了多种多样的 AWG 波长多路波分复用/解复用器, 包括 16×16 、 32×32 、 128×128 , 最小信道间隔 0.2nm , 插入损耗 3.5dB , 每通道 3dB 带宽 11GHz , 信道串音小于 -16dB 的 WDM 器件。

AWG 还可以和其他器件集成, 构成具有某些特定功能的模块, 如光分插复用器(OADM)、波长路由器、多波长光源系统、光谱分析仪和测量系统等。

9.5 光 开 关

光开关是一种对光传输线路或集成光路中的光信号进行转换或逻辑操作的光学器件, 主要应用于光纤环路、光路切换、自动测量和动态配置分插复用等领域。光开关是光纤通信技术中不可或缺的无源器件, 可以说没有光开关, 就没有光通信网络。例如, 利用两个 1×2 光开关的不同状态, 如图 9.25 所示, 就可以通过一根光纤实现发射端与接收端之间四种组合(A \rightarrow a、A \rightarrow b、B \rightarrow a 和 B \rightarrow b)的信息传送。当然, 发送系统 B 也可以作为主系统 A 的备用系统, 一旦主系统 A 出现故障, 光开关能够立即切断 A 系统, 接入到备用系统 B。冗余系统 B 的目的是提高信息传送系统的可靠性, 保证信息及时、畅通地传输。

根据不同的工作原理, 光开关类型主要有机械光开关(如移动光纤、活动镜面)和非机械光开关两大类。非机械光开关又有波导光开关(如 LiNbO_3 、GaAs)、热光开关(如液晶、聚合物)等形式。本节简要介绍几种光开关的工作原理和特点。

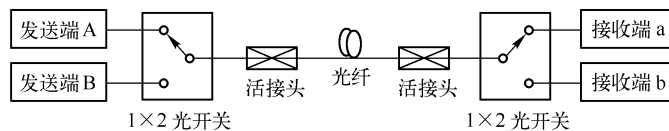


图 9.25 光路切换示意图

1. 机械光开关

机械光开关有两种形式，一种是通过电磁制动或热制动驱动光纤活动的机械光开关，另一种是由静电驱动棱镜或反射镜转动来完成切换的机械光开关。

图 9.26(b)所示为 $1 \times N$ 路 (N 可达 32 以上) 机械式单模光纤光开关结构示意图 (原理框图如图 9.26(a) 所示)。通过电磁铁驱动移动臂的旋转，使发送端的光纤接头被切换与不同固定臂的光纤接头相耦合，可以将发送端信息传送到不同客户的接收端。

机械光开关的优点是技术简单，插入损耗低 ($<1\text{dB}$)，隔离度高 (可达 80dB)，寿命大于 2×10^5 次。但机械光开关的缺点也比较明显，如体积和质量都大，震动对它的性能有较大影响。最大的不足是它的响应速度较低 (ms 量级)，限制了机械式光开关的应用范围。

图 9.27 为二维结构的微机电发射镜面系统 (MEMS: micro-electro-mechanical systems) 光开关示意图，它将光、电和机械集成为一块半导体 (如 Si 材料) 芯片上，其基本原理是通过静电的作用使可以活动的微镜面发生转动，从而改变输入光的传播方向。MEMS 既有机械光开关的低损耗、低串扰、低偏振敏感性和高消光比的优点，又有较高的开关速度、较小体积、易于大规模集成等优点。微机电发射镜面系统光开关器件也有三维结构，已经是一种比较成熟的光开关，被广泛应用于骨干网或大型交换网。

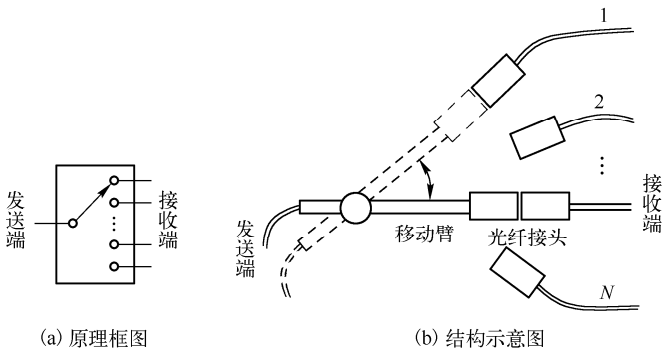


图 9.26 机械式 $1 \times N$ 单模光纤光开关

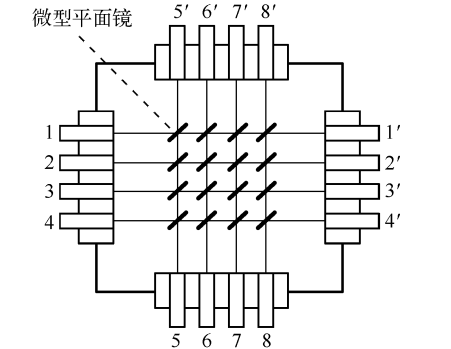


图 9.27 微机电发射镜面系统光开关示意图

2. 非机械光开关

图 9.28 是一种利用极化旋转器实现光开关功能的示意图，它是非机械式，主要由光纤、自聚焦透镜、起偏器、极化旋转器和检偏器组成。其中极化旋转器是一个关键器件，常见的有 Faraday 旋转器、电光晶体 (如 LiNbO_3 晶体) 等。

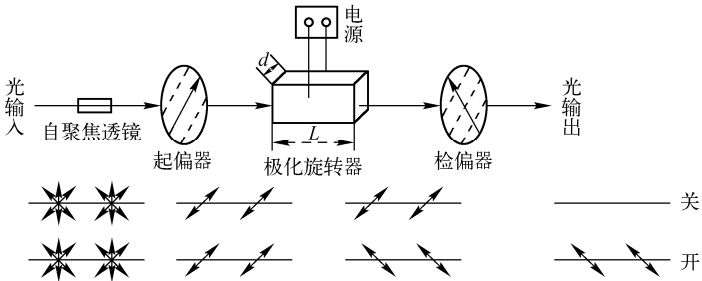


图 9.28 利用极化旋转器实现光开关功能的示意图

图 9.28 所示光开关的工作原理为：若输入光为自然光，由自聚焦透镜聚焦，通过起偏器后变为线偏振光：(1) 当极化旋转器电源不工作时，该线偏振光保持原有偏振方向通过极化旋

转器，由于检偏器轴向与起偏器轴向垂直，故线偏振光信号无法通过检偏器，没有光信号输出到末端，即达到断光状态，此为“关”；（2）但当极化旋转器电源供给电压时，极化旋转器工作，使线偏振光通过极化旋转器后偏振方向旋转 90° 。旋转后的线偏振光可以顺利通过检偏器输出，此时为“开”状态。

常见的极化旋转器是电光晶体，它进行电光调制的物理基础就是电光效应，即电光晶体在外加电场的作用下，晶体的折射率发生变化

$$n(E) = n - \frac{1}{2}\gamma n^3 E \quad (9.5-1)$$

式中， n 为折射率， E 为电场强度， γ 为电光系数。

由于电光晶体是由各向异性介质组成的，晶体的快轴 (x 轴)、慢轴 (y 轴) 上的折射率 n_x 、 n_y 不同，它们的电光系数 γ_x 、 γ_y 也各异。因此，在外加电场的作用下，两个方向的折射率分别为

$$\begin{cases} n_x(E) = n_x - \frac{1}{2}\gamma_x n_x^3 E \\ n_y(E) = n_y - \frac{1}{2}\gamma_y n_y^3 E \end{cases} \quad (9.5-2)$$

当光经过长度为 L 的电光晶体后，快、慢轴的相位延迟为

$$\begin{aligned} \varphi &= k_0[n_x(E) - n_y(E)]L \\ &= k_0[n_x - n_y]L - \frac{1}{2}k_0[\gamma_x n_x^3(E) - \gamma_y n_y^3(E)]LE \end{aligned} \quad (9.5-3)$$

若晶体厚度为 d ，所加电压为 V ，得到 $E = V/d$ 。再令 $\varphi(0) = k_0[n_x - n_y]L$ ，则入射的偏振光经加电的电光晶体后，产生的附加相位为

$$\varphi = \varphi(0) - \frac{1}{2}k_0[\gamma_x n_x^3(E) - \gamma_y n_y^3(E)]\frac{LV}{d} \quad (9.5-4)$$

选择合适的电源工作电压，电光晶体就可将入射的线偏振光的偏振方向旋转 90° ，可以作为光开关的一部分器件，而且这种光开关的响应时间很短 (ns 量级)，开关速度很高。

相对而言，前面三种光开关的体积较大，不利于高密度多路开关集成。波导光开关则较好地弥补了这些不足。

波导开关也是通过改变介质的波导折射率来实现交换的。根据物理效应和所用材料不同，波导光开关有电光开关、热光开关、声光开关等类型。

图 9.29 所示为电光波导式光开关原理示意图，它是在铌酸锂 (LiNbO_3) 基片上 Ti 扩散成两条彼此靠近的光波导，并在光波导附近安装了电极。利用电光效应，即通过施加一个电场改变波导材料的折射率，就可以方便地控制光传播中的强度、位相和传播方向。因此，通过调节电极电压，改变波导的耦合方式，使输入端和输出端的通路状态在“通光”、“断光”之间变化。

电光开关的结构有 M-Z 干涉仪型和方向耦合器型等。电光开关由于没有机械部分，电极的分布参数也很小，开关速度为纳秒量级，并能够将多个相同波导光开关集成在一个 LiNbO_3 基片上，达到高密度安装，如图 9.30 所示。

液晶光开关的原理也是利用了电光效应，但液晶的电光系数很高，比 LiNbO_3 晶体高几百倍，因此在外加电场的作用下，液晶更能高效地改变光的传输方向，实现开关功能。

热光开关利用的是热光效应，即通过对波导加热改变材料的折射率，达到控制光传播方向的目的。用高分子聚合物材料制作的波导，热光系数很高，导热率又很低，能更有效地利用热来控制光的传播方向。所以，聚合物材料波导技术是非常有吸引力的一项技术。

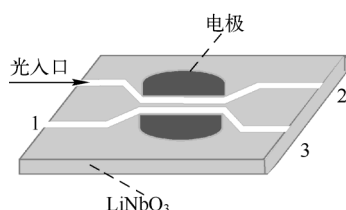


图 9.29 波导式光开关
原理示意图

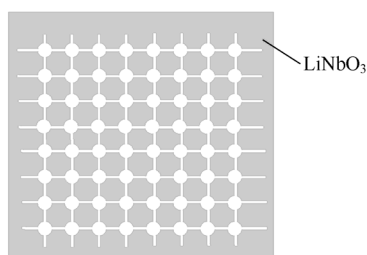


图 9.30 高密度波导式光开关
原理示意图

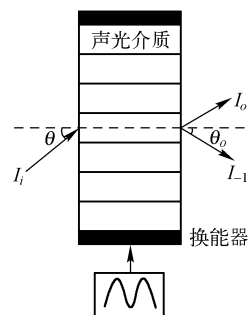


图 9.31 声光 Bragg
衍射示意图

声光开关利用的是声光效应，如图 9.31 所示的声光 Bragg 衍射。音频信号源驱动换能器(如压电陶瓷)伸缩，声波形成驻波，导致介质产生随时间和空间周期变化的弹性形变，进而使介质的折射率发生周期性变化，这种现象等效于位相光栅，使入射光发生衍射。因此，声光效应也提供了一种方便控制光的强度和传播方向的手段。

集成光开关网络的拓扑结构多种多样，例如，图 9.32 所示结构等。在不同的应用领域设计不同的网络拓扑结构，可以获得快捷、高效的光转换或光运算效果。

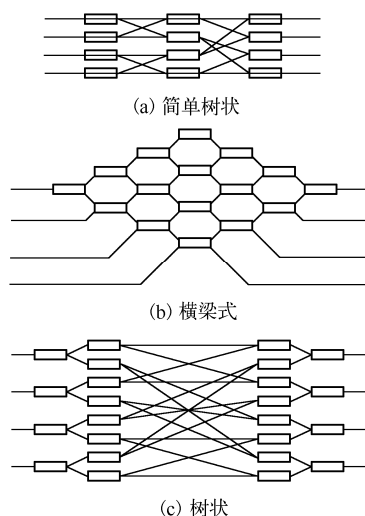


图 9.32 光开关网络

习题

9-1 基本概念：无源光器件，光纤光栅，Bragg 光纤光栅，波导光栅，波导衍射光栅，净能流，定向耦合，完全耦合，耦合长度，光波分复用/解复用(WDM)，角色散本领，线色散本领，分辨本领，阵列波导光栅(AWG)，光开关。

9-2 定性说明光纤光栅的滤波特性和基本原理。假定 $n=1.5$ ， $\Delta n=1.5 \times 10^{-3}$ ， $\lambda=1.5\mu\text{m}$ ， $L=1.5\text{mm}$ ，求出光纤光栅的最大反射率、边值反射率和带宽。

9-3 假定 $n=1.5$ ， $\Delta n=5 \times 10^{-4}$ ， $\lambda=1.55\mu\text{m}$ ， $L=4\text{mm}$ ，绘出光纤光栅反射谱曲线。

9-4 两波导在满足什么条件下才会发生有效的定向耦合？

9-5 什么是波分复用/解复用器？对它有哪些基本要求？

9-6 简述马赫-曾德尔(M-Z)干涉仪的基本结构及工作原理。

9-7 简述 F-P 腔光滤波器的工作原理。

9-8 AWG 由哪几部分构成？有哪些基本特性？

9-9 假设图 9.24 所示的阵列波导光栅复用器工作于中心波长 $1.55\mu\text{m}$ ，有 20 个通道，相邻通道波长间隔 1nm ，聚焦平板区的曲率半径为 8mm 。输入和输出波导间距为 $125\mu\text{m}$ ，阵列波导间距 $7\mu\text{m}$ 。平板区域的折射率为 1.67。求该阵列相邻波导间的光程差为多少？

9-10 光开关可以分为哪几类，并分别说明其优缺点。

第 10 章 光波导放大器

10.1 概 述

在光纤通信中人们总是希望能将光信号不失真地传得越远越好,然而,由于光纤内吸收、散射等各种因素的影响,光纤总是存在一定的损耗。虽然光纤损耗目前已接近降至其理论临界值,但在超长距离的信号传输过程中仍需对光信号进行中继放大。早期的中继放大形式是前端光纤传来的多信道光信号经解波分复用器(WDM: Wavelength Division Multiplexing)将每个波长的光信号分开,各自进行光电变换(O/E: Optical/Electronic)为电信号后,分别对每个信道的电信号进行放大,再经电光变换(E/O: Electronic/Optical)转换为光信号,并由 WDM 重新整合,送给后端光纤传输。光电-电光中继放大模式不仅浪费了许多硬件资源,而且信号传输系统的稳定性和可靠性也不能得到很好的保证。特别的,由于电子器件及光电转换器件的介入,使传输速率和传输带宽等均受到限制。

1987 年, Mears 等研制出掺铒光纤放大器(EDFA: Er-Doped Fiber Amplifier), 光纤通信的传输不再受到光纤损耗的限制,大大提高了信号传输距离,给光纤通信带来了革命性的变化,也使光纤通信朝着全光网络(AON: All Optical Net)通信体系迈出了坚实的一步。

掺铒光纤放大器是一种全光放大器,它不需要光电转换、电光转换和电放大系统,而是直接对光信号进行放大,克服了传统的光-电-光中继器造成的“电子瓶颈”效应。掺铒光纤放大器主要工作在 1550nm 波段,光纤在该波段存在一个低损耗窗口,损耗系数仅为 0.2dB/km。根据在光纤线路中的作用光放大器分为前置放大器、中继放大器和功率放大器。已商用的掺铒光纤放大器具有噪声低、增益曲线好、放大器带宽宽、与波分复用系统兼容、泵浦效率高和工作性能稳定等优点,在高速光通信系统中备受青睐。目前,“掺铒光纤放大器(EDFA)+密集波分复用(DWDM: Dense Wavelength Division Multiplexing)+非零色散光纤(NZDF: Non-Zero Dispersion Fiber)+光子集成(PIC: Photonic Integrated Circuit)”正成为国际上长途高速光纤通信线路的主要技术方向。

然而,掺铒光纤放大器本身也有不足,如增益谱在可利用的约 30nm 的波长范围内不均匀,需使用均衡技术来克服(达到 3dB 以内);特别是 EDFA 的长度为几米到几十米,不能满足迅猛发展的光通信产业对器件体积、成本和集成化的要求,极大地局限了它的应用范围。这种情况下,人们自然又把目光转向更具集成化发展前景的平面光波导放大器。

用于光通信的波导放大器主要集中在掺铒平面光波导放大器(EDWA: Er-Doped Waveguide Amplifier)上。EDWA 是继 EDFA 和半导体激光放大器(SOA)研制成功以来的一种很有发展前途的光放大器。EDWA 能实现铒离子在基质材料中的高浓度掺杂,通过较短的波导就能获得较高的增益,一般来说,光通过几厘米至十几厘米长的掺铒波导就可得到 10dB 以上的增益。若将波导刻蚀成环绕状,EDWA 尺寸还可进一步缩小。EDWA 不但能够在微小的尺寸上获得高信号增益,还具有噪声系数低、极化相关性小和通道间串扰弱等优点,主要应用于多功能的光子集成芯片,作为局域网络光信号处理的执行元件。EDWA 非常容易与任何损耗元件如波分复用器、光滤波器、调制器、光开关和激光器等有源、无源器件集成在同一个芯片上,组成高效的光电集成器件,使很多光学功能在一块芯片中无损耗地完成,并可消除器件对接问题,提高器件的可靠性。可以说,

平面光波导放大器具有的优良性能，是拉动光纤通信进一步发展到城域网，包括光纤到户的动力源泉，同时，也将是光电子集成(OEIC: Optics-Electronics Integrate Circuit)研究的基础。

图 10.1 和图 10.2 分别示出了光纤放大器和平面波导放大器示意图。

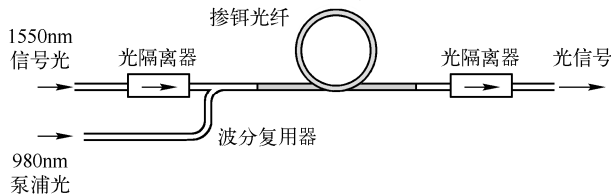


图 10.1 光纤放大器示意图

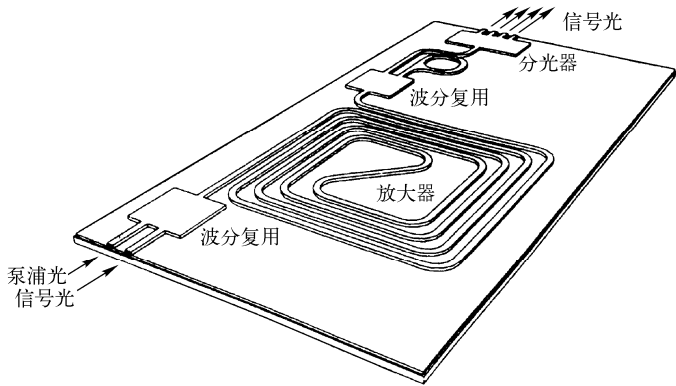


图 10.2 平面光波导放大器示意图

Er 在不同基质中的溶解度不同，如在硅中较低，在 Y_2O_3 、 Al_2O_3 中则较高，所以制作 EDWA 要求对基质材料有所选择。目前已有许多掺 Er 的基质材料，如 Si、 SiO_2 、磷硅玻璃、钠钙硅玻璃、 $LiNbO_3$ 、 Y_2O_3 、 Al_2O_3 、有机聚合物等，它们都各有优缺点。如掺铒玻璃波导放大器易于和光纤耦合，但掺杂浓度不是很高。掺铒 Al_2O_3 波导放大器，因芯层折射率较大，可实现大曲率弯曲，而且模场约束好，可实现有效的泵浦和放大。另外因 Al_2O_3 和 Er_2O_3 的原子价相同，晶体结构相似，可将高浓度的 Er 结合进 Al_2O_3 晶体结构中，从而在较短的尺寸内得到较高的增益。但缺点是薄膜制备比较复杂，不易刻蚀。而采用聚合物材料制备的有机光波导放大器，可以有效弥补有些无机光波导放大器工艺复杂、折射率改变量小、无法与硅基材料集成的缺点，只须通过室温旋涂和光刻等工艺就可以制作出功能复杂的光电集成器件，并且折射率差易于调整，制作的器件轻巧，适用于制作高密度集成器件。

考虑到稀土离子能级结构上的特点，除掺铒(Er^{3+})光放大器可以实现波长在 1550nm 附近的光放大以外，还可以通过掺杂其他稀土离子，在适当的泵浦条件下对其他波段光信号提供增益，如掺镨(Pr^{3+})光放大器可实现波长在 1310nm 附近的光放大，其他波段有掺铥(Tm^{3+})光放大器(810nm)、掺钕(Nd^{3+})光纤放大器(1300nm)等。

10.2 铒离子的光谱特性

10.2.1 Er^{3+} 能级结构

稀土元素铒(Er: Erbium)位于周期表第IIIB 族的镧系中，原子序数为 68，原子量为 167.2。

Er 原子的电子壳层排布为 $[\text{Kr}]4d^{10}4f^{12}5s^25p^66s^2$ ，它很容易失去 2 个 6s 电子和一个 4f 电子形成三价 Er 离子，电子组态为 $[\text{Kr}]4d^{10}4f^{11}5s^25p^6$ ，它的未满壳层的 4f 电子决定了 Er^{3+} 的光电特性。4f 电子属内层电子，受到 5s 和 5p 壳层的屏蔽，受外场的影响是微弱的，荧光波长和吸收波长对外场的依赖性也较小。因此溶于固体中的 Er 离子基本保持自由离子的能级结构，并不展宽为通常的固体能带，这是稀土离子的一个重要特点。

铒离子在固体中的发光行为分为两类：第一类是线状光谱的 f^N 组态内跃迁，即 4f-4f 跃迁；第二类是宽带光谱的 f^N 组态内能级向其他组态能级的跃迁，如 4f-5d 跃迁。由于铒离子呈现的窄带光谱光色纯正，使其非常适合做激活离子。

对于自由稀土离子，理论上，对由电偶极相互作用引起的跃迁来说，4f-5d 是被允许的跃迁，4f-4f 跃迁则是被禁戒的，因为 f^N 组态内的各种状态宇称是相同的，在原子和离子状态中，跃迁矩阵元等于零，不满足跃迁选择定则。然而一般情况下，固体或溶液中能够很容易地观察到可见区或近红外区的 4f^N 组态内的 f-f 跃迁，原因是在凝聚态中，奇次项晶体场的作用，使相反宇称的 4f^{N-1}n'l' 组态混入到 4f^N 组态之中，4f^N 组态内的状态由单一状态变为两种宇称的混合态，从而使电偶极跃迁成为可能。按照 J-O 理论， Er^{3+} 的光谱主要就是 4f 电子跃迁引起的。

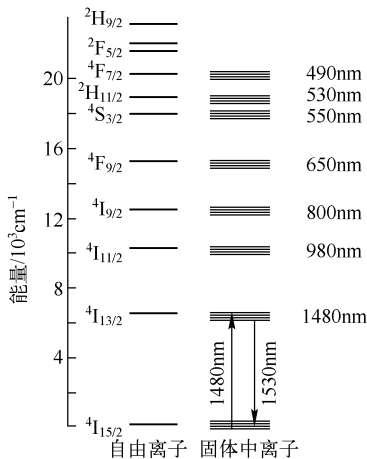


图 10.3 铒离子的斯塔克能级分裂示意图

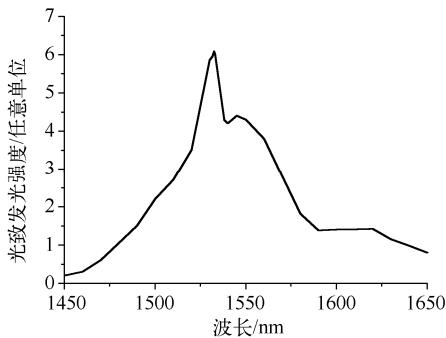


图 10.4 Er^{3+} 发射谱

此外，由于周围的基质原子或离子产生的局部电场对铒离子产生了微扰，消除了原来存在的能级简并，使内层 4f 电子的能级产生分裂，也就是斯塔克效应。同时，由于非均匀加宽效应，也对能级展宽有一定的影响，这些密集的分裂态使基质中 Er^{3+} 的每个电子能级形成准能带。11 个 f 电子的不同组态可构建的离子能级如图 10.3 所示，其中，右侧的一系列数据代表来自于基态的吸收跃迁波长

由于 Er^{3+} 丰富的能级结构，受激发后，可以获得从近红外到紫光的荧光光谱。特别是 Er^{3+} 从第一激发态 $4I_{13/2}$ 向基态 $4I_{15/2}$ 的辐射跃迁，峰值波长为 1530~1550nm，正处于光通信的 C 波段(1525~1565nm)。因此，利用掺铒的光纤放大器和光波导放大器可以很好地补偿光信号在传输中的衰减。图 10.4 是掺杂在 Al_2O_3 基质中的 Er^{3+} 的 1530nm 光致发光光谱，谱线宽度(FWHM)一般为 30~50nm。

常温下 Er^{3+} 处于基态并在能带内保持 Boltzmann 分布，为使 Er^{3+} 达到发光状态，需从外部输入能量，迫使 Er^{3+} 被激发到高能级。泵浦的方式有很多，如光致发光(PL, photoluminescence)：由外部光源照射样品，激发铒离子到高能态，铒离子回到低能态辐射出电磁波。再如电致发光(EL, electroluminescent)：在两电极加上电压，被电场激发的电子碰击

发光中心，从而引起电子能级的跃进、复合，导致发光。还有其他的泵浦形式，如热发光、化学发光等。

迄今的研究已证实，以特定波长的光泵浦是有效而可行的激发方式。铒的吸收带有 520nm(氙离子激光器输出波长)、650nm(染料激光器)、800nm(半导体激光器)、980nm(半导体激光器)、1480nm(半导体激光器)等，这些频带都可用来泵浦。半导体激光器稳定性好，体积小，有利于集成，目前用作泵浦源的都是大功率半导体激光器。实际上，使用半导体激光器泵浦源是 EDFA 和 EDWA 实用化的前提。

10.2.2 Er^{3+} 的光致发光机制

光致发光有下转换和上转换两种形式。下转换 (Down-conversion)，又叫量子剪裁 (Quantum Cutting)，指的是用一短波长高能量的光源照射样品后，获得长波长低能量的光辐射，如图 10.5 所示。频率为 ν_i 的光子入射，得到频率为 ν_{01} 、 ν_{02} 的光子辐射。一个入射光子可能获得 2 个或 3 个光子输出，量子效率大于 100%，可达 200% 以上。

上转换 (Up-conversion) 正好与下转换相反，指的是用一长波长低能量光源照射样品，获得短波长高能量的光辐射。上转换机制主要有激发态吸收 (ESA: Excited State Absorption)、能量传递 (ET: Energy Transfer)、合作上转换 (CU: Co-operative Up-conversion) 和交叉弛豫 (CR: Cross Relaxation) 等，如图 10.6 所示。

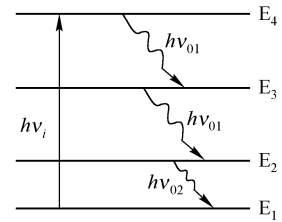


图 10.5 下转换示意图

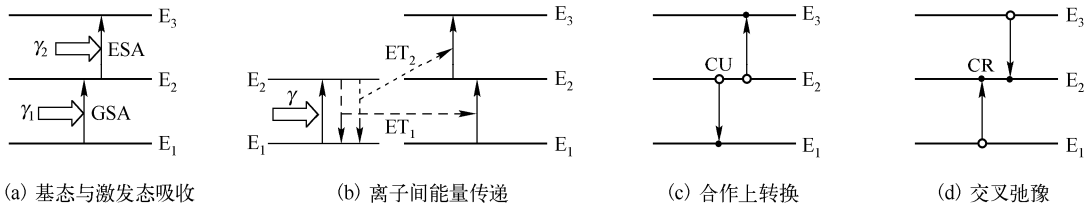


图 10.6 四种上转换机制示意图

处于基态 E_1 的稀土离子吸收外界的光子 γ_1 ，跃迁到高能级 E_2 ，称之为基态吸收 (GSA: Ground State Absorption)；处于激发态 E_2 能级的粒子再一次吸收外界的光子 γ_2 ，跃迁到更高的能级 E_3 ，则被定义为激发态吸收，如图 10.6(a) 所示。

图 10.6(b) 中，处于激发态的一种离子(施主离子)与处于基态的另一种离子(受主离子)在满足能量匹配时，彼此间发生相互作用，施主离子将能量传递给受主离子，使其跃迁至激发态能级，而施主离子本身则通过无辐射弛豫的方式返回基态，这一过程称作能量传递。同样也存在反向能量传递过程。位于激发态能级上的受主离子同样可能进行第二次能量转移跃迁至更高的激发态能级 (ET2)，此过程也称为连续能量传递 (SET: Successive Energy Transfer)。

高浓度掺杂情况下，相邻两个激发态离子间距很小，将发生两离子间的电偶极矩相互作用。如果存在合适的能级结构，处于某一激发态的两个离子，将有一个离子把能量传递给另一个离子而返回基态，得到能量的离子跃迁到更高的能级。这一过程常被称为合作上转换，是一种非线性的双离子效应，如图 10.6(c) 所示。

与合作上转换过程相反，处于低能级和高能级的两个离子相互作用，分别向上和向下跃迁到中间的能级，则被称为交叉弛豫，如图 10.6(d) 所示。

激发态吸收过程为单个离子吸收，不依赖材料中稀土离子的掺杂浓度，主要与外来光强度

(泵浦功率)有关。泵浦功率越高,激发态吸收跃迁几率越大。能量传递一般发生于不同类型的离子之间,强度与 $1/r^6$ 成函数关系(r 为离子距离),需用正反向能量传递系数表征。合作上转换与掺杂浓度有密切关联,浓度越高,合作上转换作用越明显,也可能导致某一激发态能级上的粒子数密度随掺杂浓度提高反而下降,即所谓的“浓度猝灭现象”。交叉弛豫也与稀土掺杂浓度有关。

图 10.7 是掺铒硼硅酸盐玻璃微晶在 978nm 半导体激光泵浦下观测到的光致发光谱。图中主要有 3 个发射峰,中心波长为 531nm、547nm 的两个绿色上转换发射峰分别对应着铒离子 $^2H_{11/2} \rightarrow ^4I_{15/2}$ 和 $^4S_{3/2} \rightarrow ^4I_{15/2}$ 能级间的跃迁;中心波长为 668nm 红光波段发射峰则对应着 $^4F_{9/2} \rightarrow ^4I_{15/2}$ 的能级跃迁;近红外 836nm 则对应于能级 $^4S_{3/2} \rightarrow ^4I_{13/2}$ 的跃迁。从图中还可以知道 Er^{3+} 的 $^2H_{11/2}$ 能级和 $^4F_{9/2}$ 能级在晶体场的作用下产生 Stark 分裂,造成 $^2H_{11/2} \rightarrow ^4I_{15/2}$ 、 $^4F_{9/2} \rightarrow ^4I_{15/2}$ 的跃迁分别存在两个发射峰。从图中也可看出随激光器泵浦功率的增加,荧光强度也增加,中心波长没有改变。

这些光谱的产生是由于存在多种上转换机制的结果。如图 10.8 所示,基态 $^4I_{15/2}$ 铒离子吸收泵浦光跃迁至 $^4I_{11/2}$ 能级(GSA: $^4I_{15/2} + \gamma \rightarrow ^4I_{11/2}$),再经激发态吸收跃迁至 $^4F_{7/2}$ 能级[ESA(I): $^4I_{11/2} + \gamma \rightarrow ^4F_{7/2}$];同时能级 $^4I_{11/2}$ 上的铒离子通过合作上转换跃迁到 $^4F_{7/2}$ 能级(CU: $^4I_{11/2} + ^4I_{11/2} \rightarrow ^4I_{15/2} + ^4F_{7/2}$)。由于 $^4F_{7/2}$ 能级寿命很短,布居于其上的铒离子迅速无辐射跃迁到 $^2H_{11/2}$ 能级。处于 $^2H_{11/2}$ 能级上的铒离子,一部分继续无辐射跃迁到 $^4S_{3/2}$,一部分回到基态 $^4I_{15/2}$,发射出 531nm 的绿光。而处于 $^4S_{3/2}$ 能级上的铒离子,同样一部分继续无辐射跃迁到 $^4F_{9/2}$,一部分回到基态 $^4I_{15/2}$,发射出 547nm 的绿光。

图 10.8 也表示了红光发射能级 $^4F_{9/2}$ 上的粒子布居过程:激发态吸收 ESA(II): $^4I_{13/2} + \gamma \rightarrow ^4F_{9/2}$;交叉弛豫 CR I: $^4I_{9/2} + ^4I_{11/2} \rightarrow ^4I_{13/2} + ^4F_{9/2}$, CR II: $^4I_{11/2} + ^4I_{13/2} \rightarrow ^4I_{15/2} + ^4F_{9/2}$, CR III: $^4F_{7/2} + ^4I_{11/2} \rightarrow ^4F_{9/2} + ^4F_{9/2}$ 。

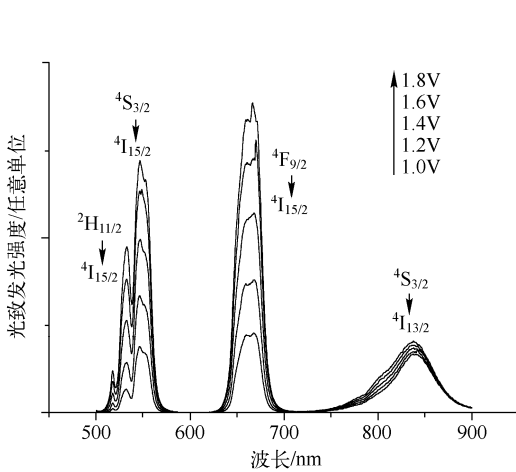


图 10.7 Er^{3+} 在可见光波段和近红外波段的光谱

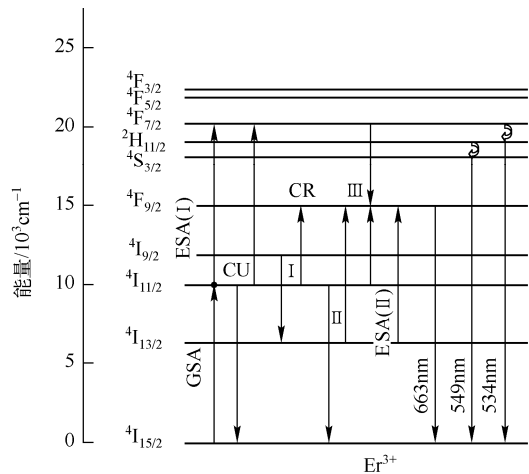


图 10.8 掺铒玻璃能级跃迁示意图(978nm 泵浦)

10.3 速率方程

10.3.1 光放大原理及光泵浦波长

掺铒光波导放大器的泵浦波长和工作波长依赖于 Er^{3+} 的能级和光谱。半导体激光器做泵浦

源时, 波长可选为 980nm、1480nm 和 800nm 等。不同波长的泵浦光既可以引起基态吸收(GSA), 也可以引起激发态吸收(ESA)。因为基态的粒子数最多, 所以发生 GSA 的几率比 ESA 的几率大得多。粒子被泵浦光激发到高能态时并不稳定, 寿命仅为微秒甚至纳秒量级, 它会迅速跃迁至第一激发态 $^4I_{13/2}$, 该能级寿命约几个毫秒, 可以认为是亚稳态。在连续泵浦下, $^4I_{13/2}$ 能级的粒子数不断增加, 从而实现第一激发态与基态之间的粒子数反转。当有 1530nm 外部信号光激励时, 粒子将以受激辐射的方式由能级 $^4I_{13/2}$ 跃迁到基态 $^4I_{15/2}$ 并发射一个全同光子, 实现光放大。由此决定了掺铒光放大器的可放大光信号波长为 1530nm。图 10.9 示出了 980nm 泵浦下通过 Er^{3+} 能级跃迁实现光放大的示意图。当然, 也有少部分粒子以自发辐射的方式从亚稳态跃迁回基态, 产生自发辐射噪声。自发辐射在传播过程中也被不断放大, 形成放大的自发辐射(ASE)。

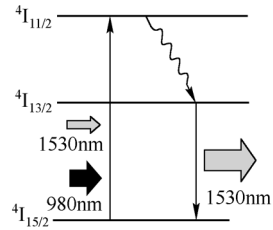


图 10.9 980nm 泵浦下光放大示意图

铒离子对不同波长泵浦的光子吸收并非一样强, 它是由铒离子和光子的相互作用截面决定的。对上述的三种波长, 吸收截面较大的是 980nm 和 1480nm, 其次是 800nm。800nm 泵浦时, $^4I_{13/2}$ 能级的激发态吸收非常强烈, 激发态吸收截面大于基态吸收截面, 泵浦效率很低。实验和理论分析证明, 980nm 和 1480nm 是较佳的泵浦波长, 但是二者的泵浦机理却有很大的差异。

用波长 1480nm 的光泵浦时, 因该波长与信号光的 1530nm 相近, 光放大是在二能级系统(第一激发态 $^4I_{13/2}$ 和基态 $^4I_{15/2}$)中完成的。由于同能级泵浦, 泵浦光和信号光间可能发生干扰, 高增益下的信号质量不高。而且泵浦光对低能级的激发作用和对高能级的退激发作用同时发生, 泵浦效率降低, 即使在无限的泵浦功率下粒子数反转也不充分, 因此不可避免地会使放大器信噪比下降。波长 980nm 的光泵浦是将 Er^{3+} 直接激发到第二激发态($^4I_{11/2}$), 然后通过无辐射跃迁快速弛豫至第一激发态而实现粒子数反转。在这样一个三能级系统中, 第三能级只起到中转作用, 不可能积累较多的粒子数。而且由第三能级向基态的受激辐射极其微弱, 有文献给出 Er^{3+} 对 980nm 的发射截面 σ_{31} 的实验测量结果为零。定量的分析计算也表明 980nm 的泵浦效率相对较高, 可达到较高的反转度。在各种泵浦波长中, 以 980nm 为最佳。

图 10.10 为掺铒光纤放大器光泵浦方式示意图。前向泵浦方式, 即信号光与泵浦光传输方向相同, 前向的信号光与泵浦光通过波分复用器汇合后, 进入同一根光纤传输。此外还有反向和双向泵浦方式。

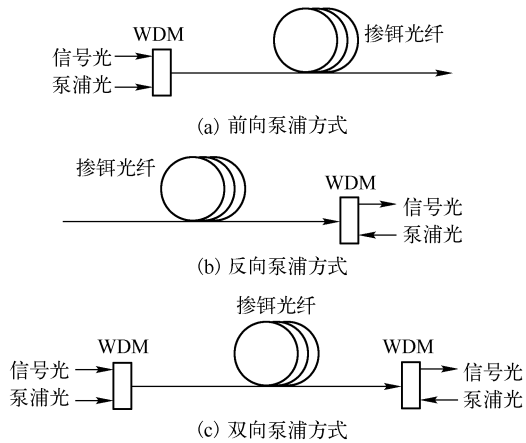


图 10.10 掺铒光纤放大器光泵浦方式示意图

EDFA 具有以下优点: (1) 与传输光纤结构相同, 使其与传输光纤的熔接损耗小, 整体增益高, 不易自激; (2) 有 1~4THz 的宽频带特性, 超高速数字传输和宽频带模拟传输的使用范围广; (3) 铒离子 4f 电子处于外层电子的良好屏蔽中, 使发光过程受外界和内部晶体的干扰非常小, 本身噪声低; (4) 光的非线性成分小; (5) 温度特性好。

EDWA 的光放大机制与 EDFA 一致, 也是通过铒离子亚稳态 $^4I_{13/2}$ 与基态 $^4I_{15/2}$ 间的粒子数反转, 实现受激辐射放大的。但因其是在芯片上制备的, 尺寸小, 更利于光电一体化。

10.3.2 铈-铒共掺系统的速率方程

速率方程是讨论光放大器、激光器的粒子数反转和增益的基础。可以根据具体的能级系统列出有关能级上的粒子数随时间变化的微分方程组，这些微分方程组称为速率方程组。不同物质的能级结构和跃迁机制不同，泵浦波长不同，相应的速率方程也不相同。

虽然实验和理论上都已证明，980nm 是掺铒光放大器相对较好的泵浦波长，但 Er^{3+} 对 980nm 的吸收截面还是相对较小。为提高 EDFA/EDWA 的泵浦效率进而提高增益，有效方案之一就是共掺杂另一种稀土元素铈(Yb:Ytterbium)，制备 Yb^{3+} - Er^{3+} 共掺杂波导放大器(YECDWA:Yb/Er co-doped waveguide amplifier)。在掺 Er 波导材料中共掺杂 Yb 具有如下优点：

(1) Yb^{3+} 对 980nm 的吸收($^2\text{F}_{7/2} \rightarrow ^2\text{F}_{5/2}$)截面要比 Er^{3+} 的大一个数量级，通过 Yb^{3+} - $^2\text{F}_{5/2}$ (施主离子)和 Er^{3+} - $^4\text{I}_{15/2}$ (受主离子)的能量传递， Er^{3+} 得到泵浦，这极大地提高了掺铒光放大器的泵浦效率。图 10.11 是只掺铒和铈铒共掺氟氧化物玻璃的吸收截面谱，内图为 Er^{3+} 的荧光谱，可见掺入 Yb 后，极大地提高了能级 $^4\text{I}_{13/2}$ 上的铒离子数密度，1530nm 荧光强度大幅度提高。图 10.12 是作为敏化剂的铈离子与铒离子间的能量共振转移示意图。

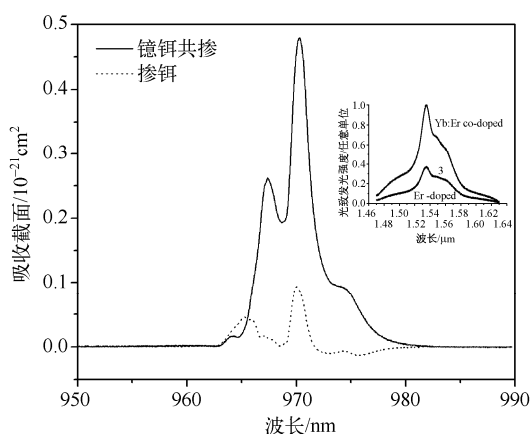


图 10.11 铒、铈离子对 980nm 的吸收截面

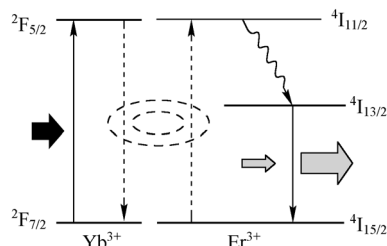


图 10.12 铈铒共掺系统能量传递示意图

(2) Er^{3+} 与周围的 Yb^{3+} 形成感应对。 Yb^{3+} 与 Er^{3+} 半径相近，特性相似，易于成簇， Er^{3+} 周围可以围绕多个 Yb^{3+} ，成簇一般不在两个或多个 Er^{3+} 之间产生，而是在一个 Er^{3+} 和几个 Yb^{3+} 之间产生，这些特性既有效地增加了 Yb^{3+} - Er^{3+} 的能量传递效率，又减少了 Er^{3+} 之间的上转换这一不利因素。

(3) 由于 Yb^{3+} 的能级结构除 $^2\text{F}_{7/2}$ - $^2\text{F}_{5/2}$ 外，不存在其余对应 980nm 的共振能级， Yb^{3+} 之间不发生复杂的上转换效应，而且 Yb^{3+} 发射谱($^2\text{F}_{5/2} \rightarrow ^2\text{F}_{7/2}$)与 Er^{3+} 吸收谱($^4\text{I}_{15/2} \rightarrow ^4\text{I}_{11/2}$)间有较大重叠，使得共掺杂系统的 Yb^{3+} - Er^{3+} 间共振能级跃迁效率较高，极易将能量传到 Er^{3+} 的 $^4\text{I}_{11/2}$ 能级。

(4) Yb^{3+} 在 800~1100nm 之间有较宽的吸收带，在泵浦波长的选择上比较灵活。

在 980nm 泵浦条件下，进一步考虑可能的跃迁机制，涉及的 Yb^{3+} - Er^{3+} 共掺系统的相关能级如图 10.13 所示，其中七个铒离子能级(由低到高各能级粒子数密度分别为 N_1, N_2, \dots, N_7)和两个铈离子能级($^2\text{F}_{7/2}$ 和 $^2\text{F}_{5/2}$ 上的粒子数密度是 N_8 与 N_9)。各能级间存在的跃迁机制包括铒离子和铈离子泵浦光受激吸收和受激发射、铒离子对信号光受激吸收和受激发射、自发辐射、无辐射跃迁、激发态吸收、合作上转换、交叉弛豫等。据此列出铈铒共掺杂的光波导放大器的速率方程如下：

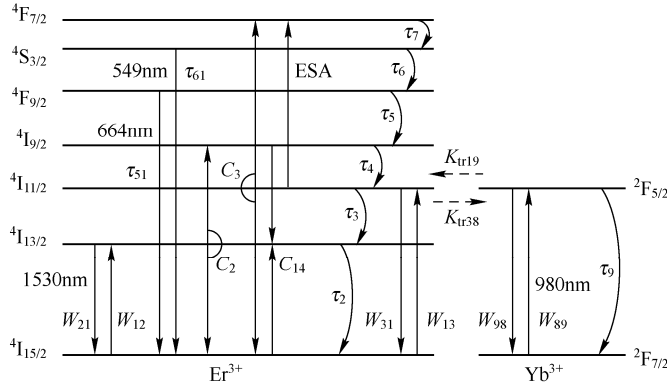


图 10.13 Yb³⁺-Er³⁺共掺系统的能级跃迁示意图(980nm 泵浦)

$$\frac{dN_1}{dt} = -W_{13}N_1 - W_{12}N_1 - C_{14}N_1N_4 - K_{tr19}N_1N_9 + W_{21}N_2 + \frac{N_6}{\tau_{61}} + \frac{N_5}{\tau_{51}} + W_{31}N_3 + \frac{N_2}{\tau_2} + C_2N_2^2 + C_3N_3^2 + K_{tr38}N_3N_8 \quad (10.3-1)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = W_{12}N_1 - W_{21}N_2 - \frac{N_2}{\tau_2} + \frac{N_3}{\tau_3} - 2C_2N_2^2 + 2C_{14}N_1N_4 \quad (10.3-2)$$

$$\frac{dN_3}{dt} = W_{13}N_1 - W_{31}N_3 - \frac{N_3}{\tau_3} + \frac{N_4}{\tau_4} - 2C_3N_3^2 - W_{ESA}N_3 + K_{tr19}N_1N_9 - K_{tr38}N_3N_8 \quad (10.3-3)$$

$$\frac{dN_4}{dt} = -\frac{N_4}{\tau_4} + \frac{N_5}{\tau_5} + C_2N_2^2 - C_{14}N_1N_4 \quad (10.3-4)$$

$$\frac{dN_5}{dt} = -\frac{N_5}{\tau_5} + \frac{N_6}{\tau_6} - \frac{N_5}{\tau_{51}} \quad (10.3-5)$$

$$\frac{dN_6}{dt} = -\frac{N_6}{\tau_6} + \frac{N_7}{\tau_7} - \frac{N_6}{\tau_{61}} \quad (10.3-6)$$

$$\frac{dN_7}{dt} = -\frac{N_7}{\tau_7} + C_3N_3^2 + W_{ESA}N_3 \quad (10.3-7)$$

$$N_{Er} = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 + N_6 + N_7 \quad (10.3-8)$$

$$\frac{dN_8}{dt} = -W_{89}N_8 + W_{98}N_9 + \frac{N_9}{\tau_9} + K_{tr19}N_1N_9 - K_{tr38}N_3N_8 \quad (10.3-9)$$

$$\frac{dN_9}{dt} = -\frac{dN_8}{dt} \quad (10.3-10)$$

$$N_{Yb} = N_8 + N_9 \quad (10.3-11)$$

其中 N_{Er} 、 N_{Yb} 分别为总掺入的铒、镱粒子数密度； $\tau_2 \sim \tau_7$ 为铒离子相应能级的平均寿命， τ_9 是镱离子 $^2F_{5/2}$ 能级的平均寿命， τ_{51} 为能级 $^4F_{9/2}$ 的辐射寿命， τ_{61} 为能级 $^4S_{3/2}$ 的辐射寿命； W_{ESA} 是 $^4I_{11/2}$ 能级的激发态吸收系数； C_2 、 C_3 是铒离子在 $^4I_{13/2}$ 、 $^4I_{11/2}$ 能级的合作上转换系数， C_{14} 为交叉弛豫系数； K_{tr19} 是铒镱离子间 $^2F_{5/2}$ 和 $^4I_{15/2}$ 能级的能量传递系数， K_{tr38} 是铒镱离子间 $^4I_{11/2}$ 和 $^2F_{7/2}$ 能级的反向能量传递系数。只分析荧光特性时，不考虑信号光作用和放大的自发辐射，即省略能级 $^4I_{13/2}$ 与基态间的受激发射几率 W_{21} 和受激吸收几率 W_{12} 项。如果去掉后三个方程及 K_{tr19} 和 K_{tr38} 项，则方程就是只掺铒光放大器的速率方程。

铒离子受激吸收几率 W_{13} 和受激辐射几率 W_{31} 分别为

$$W_{13} = \frac{\sigma_{\text{Er-a}13}(\nu_p)}{h\nu_p} I_p \quad (10.3-12)$$

$$W_{31} = \frac{\sigma_{\text{Er-e}31}(\nu_p)}{h\nu_p} I_p \quad (10.3-13)$$

式中, ν_p 为泵浦光频率, I_p 为泵浦功率, h 是普朗克常数, $\sigma_{\text{Er-a}13}(\nu_p)$ 和 $\sigma_{\text{Er-e}31}(\nu_p)$ 分别是铒离子对泵浦光的吸收截面和辐射截面。

$W_{\text{ESA}} = \sigma_{\text{ESA}} I_p / h\nu_p$ 为铒离子激发态吸收的跃迁几率, σ_{ESA} 为激发态吸收截面。激发态吸收过程与泵浦强度有关, 泵浦强度越大, ESA 跃迁速率越快。对放大器而言, 激发态吸收伴随着泵浦光能量的损失, 降低了泵浦效率。

镱离子的受激吸收几率 W_{89} 和受激辐射几率 W_{98} 分别为

$$W_{89} = \frac{\sigma_{\text{Yb-a}89}(\nu_p)}{h\nu_p} I_p \quad (10.3-14)$$

$$W_{98} = \frac{\sigma_{\text{Yb-e}98}(\nu_p)}{h\nu_p} I_p \quad (10.3-15)$$

式中, $\sigma_{\text{Yb-a}89}(\nu_p)$ 和 $\sigma_{\text{Yb-e}98}(\nu_p)$ 是镱离子对 980nm 泵浦光的吸收截面和辐射截面。

分析掺 Er 或 Yb-Er 共掺放大器增益时, 要把放大的自发辐射考虑进去, 因此

$$W_{12}(x, y, z) = \frac{\sigma_{\text{Er-a}12}(\nu_s)}{h\nu_s} I_s(x, y, z) + \sum_{j=1}^M \frac{\sigma_{\text{Er-a}12}(\nu_j)}{h\nu_j} [I_{\text{ASE}+}(x, y, z, \nu_j) + I_{\text{ASE}-}(x, y, z, \nu_j)] \quad (10.3-16)$$

$$W_{21}(x, y, z) = \frac{\sigma_{\text{Er-e}21}(\nu_s)}{h\nu_s} I_s(x, y, z) + \sum_{j=1}^M \frac{\sigma_{\text{Er-e}21}(\nu_j)}{h\nu_j} [I_{\text{ASE}+}(x, y, z, \nu_j) + I_{\text{ASE}-}(x, y, z, \nu_j)] \quad (10.3-17)$$

ν_s 为信号光频率, $\sigma_{\text{Er-a}12}(\nu_s)$ 、 $\sigma_{\text{Er-e}21}(\nu_s)$ 是 Er^{3+} 对信号光的吸收、辐射截面, M 是将自发辐射谱 (1450~1650nm) 进行区间离散化的取样数目, ν_j 是各样条的中心频率, $\sigma_{\text{Er-a}12}(\nu_j)$ 、 $\sigma_{\text{Er-e}21}(\nu_j)$ 是 Er^{3+} 对自发辐射波段内频率为 ν_j 的光波的吸收、辐射截面。上面二式中第二项可用于分析放大器的噪声。

通过解方程式 (10.3-1) ~ (10.3.11) 稳态时的速率方程, 可以分析出铒离子在各能级的粒子数分布、光致发光特性及粒子数反转情况。

10.3.3 铒离子荧光特性

速率方程是定量描述放大器粒子数反转和光放大特性的基本方程。在光波导放大器系统中, 要产生较高的增益和较低的噪声, 则需要较高的粒子数反转。粒子数反转程度的高低直接受泵浦波长、泵浦功率和掺杂浓度的影响。已有文献报道, 掺铒浓度不同, 如 $N_{\text{Er}} = 4.4 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$ 和 $N_{\text{Er}} = 2.7 \times 10^{20} \text{ cm}^{-3}$ 时, 实验测量的合作上转换系数 C_2 分别为 $3.5 \times 10^{-18} \text{ cm}^3/\text{s}$ 和 $4.1 \times 10^{-18} \text{ cm}^3/\text{s}$, 表明合作上转换系数随掺铒浓度的变化而变化。根据铈铒能量传递机制及考虑基质微观结构形式, 可以唯象地推断, 合作上转换和交叉弛豫等系数与铈铒掺杂浓度有着必然的关联。但由于交叉弛豫涉及的上能级寿命较短, 系数的变化影响较小, 因此, 有时计算中主要考虑合作上转换系数, 并将 C_2 、 C_3 构建为与铈铒掺杂浓度有关的线性函数, 同时简化地取 $C_2 = C_3$, 即

$$C = C_2 = C_3 = A^* N_{\text{Er}} + B^* N_{\text{Yb}} + D \quad (10.3-18)$$

模拟计算中, 铒、镱离子的掺杂浓度变化范围分别取为 $(0.1 \sim 4.5) \times 10^{20} \text{ cm}^{-3}$ 和 $(0.01 \sim 4.5) \times 10^{21} \text{ cm}^{-3}$, 泵浦功率则在 0~1100mW 区间变化。

掺铒浓度和泵浦功率一定时, 根据稳态时各能级粒子数密度, 三个波段光致发光强度随掺

镱浓度变化的关系曲线如图 10.14 所示。可以看到, 1530nm 荧光存在最佳掺镱浓度。

根据 Forster-Dexter 能量传递模型可估算 $\text{Yb}^{3+}\text{-Er}^{3+}$ 能量传递 $[\text{Er}^{3+}(^4\text{I}_{15/2}) + \text{Yb}^{3+}(^2\text{F}_{5/2}) \rightarrow \text{Er}^{3+}(^4\text{I}_{11/2}) + \text{Yb}^{3+}(^2\text{F}_{7/2})]$ 系数为:

$$K_{tr} = \frac{4\pi}{3} \frac{R_0^6}{R_{Yb/Er}^3 \tau_{Yb}} \quad (10.3-19)$$

式中, R_0 为临界作用间距, τ_{Yb} 为镱 $^2\text{F}_{5/2}$ 能级的平均寿命, $R_{Yb/Er}$ 为镱铒离子间的平均间距。镱掺杂浓度增加, $R_{Yb/Er}$ 变小, 镱铒能量传递系数变大, 导致铒 $^4\text{I}_{11/2}$ 能级上粒子数密度增加, 弛豫到 $^4\text{I}_{13/2}$ 能级上粒子数密度也会增加, 即近红外波段荧光强度上升。但随着掺镱浓度继续增加, $^4\text{I}_{11/2}$ 、 $^4\text{I}_{13/2}$ 能级上的铒离子间合作上转换 $[\text{Er}^{3+}(^4\text{I}_{11/2}) + \text{Er}^{3+}(^4\text{I}_{11/2}) \rightarrow \text{Er}^{3+}(^4\text{F}_{7/2}) + \text{Er}^{3+}(^4\text{I}_{15/2})]$ 、 $[\text{Er}^{3+}(^4\text{I}_{13/2}) + \text{Er}^{3+}(^4\text{I}_{13/2}) \rightarrow \text{Er}^{3+}(^4\text{I}_{9/2}) + \text{Er}^{3+}(^4\text{I}_{15/2})]$ 系数 C 增大, 使得亚稳态 $^4\text{I}_{13/2}$ 能级上的铒粒子数密度下降, 1530nm 光致发光强度减弱。

然而, 随着掺镱浓度的增加, 铒离子 $^4\text{I}_{11/2}$ 能级的合作上转换增加了 $^4\text{F}_{7/2}$ 能级上的粒子数密度。同时, 通过能量传递 $[\text{Er}^{3+}(^4\text{I}_{11/2}) + \text{Yb}^{3+}(^2\text{F}_{5/2}) \rightarrow \text{Er}^{3+}(^4\text{F}_{7/2}) + \text{Yb}^{3+}(^2\text{F}_{7/2})]$ 、激发态吸收 $[\text{Er}^{3+}(^4\text{I}_{11/2}) + \gamma \rightarrow \text{Er}^{3+}(^4\text{F}_{7/2})]$ 等机制, 也累积了铒离子 $^4\text{F}_{7/2}$ 能级上的粒子数密度。能级 $^4\text{F}_{7/2}$ 寿命约为 20ns, 粒子迅速无辐射弛豫到 $^4\text{S}_{3/2}$, 不仅导致 $^4\text{S}_{3/2} \rightarrow ^4\text{I}_{15/2}$ 能级跃迁 549nm 绿光的光致发光强度掺镱浓度单调增加, 而且无辐射弛豫到 $^4\text{F}_{9/2}$ 能级上的粒子数密度也在增加, 其跃迁到基态的 664nm 红光辐射强度也随着掺镱浓度单调增强。

镱铒掺杂浓度一定, 光致发光强度随泵浦功率关系曲线如图 10.15 所示。泵浦功率较小时, 近红外光强随泵浦功率快速增强; 继续增加泵浦功率, 近红外光强出现饱和。但在所计算的泵浦功率范围内, 红、绿光强度不断增强, 特别是 549 nm 绿光, 尚无饱和态势。

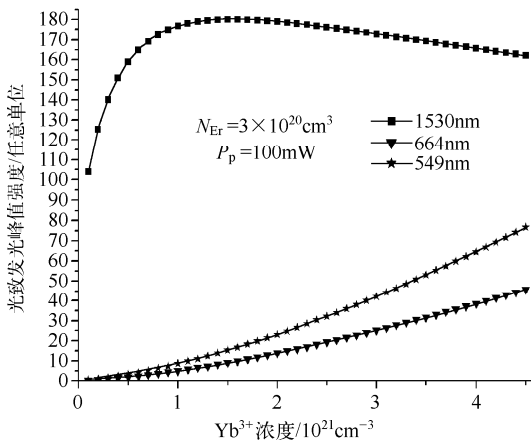


图 10.14 PL 强度与镱浓度关系曲线

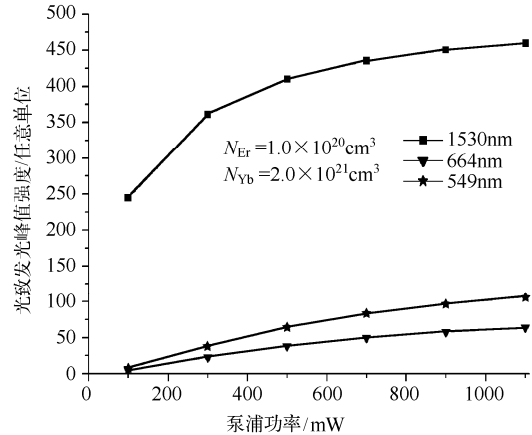


图 10.15 镱铒浓度一定, 光致发光强度与泵浦功率关系曲线

10.3.4 粒子数反转

因为波导放大器的增益特性是和反转数密切联系的, 要产生较高的增益和较低的噪声, 则需要较高的粒子数反转度。粒子数反转度的高低受泵浦功率和掺杂浓度的影响。一般来说, 实现粒子数反转存在一个最低泵浦功率, 称为阈值泵浦功率。通常反转粒子数 $N_2\text{-}N_1$ 随着泵浦功率的增大而增加, 但增加缓慢, 并趋于饱和。然而如果在相应的泵浦波长下粒子有强烈的激发态吸收和合作上转换等作用时, 泵浦功率过大, 反转粒子数可能反而下降。

粒子数反转也受铒、镱掺杂浓度的影响。以铒铕共掺 Al_2O_3 材料为例, 图 10.16 为几种镱浓度下(单位为 10^{20}cm^{-3}), 反转数随铒浓度的关系, 其中泵浦光强为 $1\times 10^4\text{ W/cm}^2$ 。图中虚线是不含镱的情况, 因此, 泵浦光强在阈值之下, 不能实现粒子数反转。从图中可知, 开始随铒浓度的增加, 反转粒子数增加, 经过某一最优值后, 随铒浓度增加反转数反而减小。这是因为合作上转换、上能级的共振能量传递等过程, 将 $^4\text{I}_{13/2}$ 或 $^4\text{I}_{11/2}$ 能级上的粒子激发到更高能级, 从而减少了亚稳态的粒子数。随铒浓度增加, 离子间距减小, 这种作用增强, 所以当铒浓度超过某一值时, 反转粒子数就有可能减小。铒铕共掺杂时, 必须考虑铒铕浓度比。一般认为 Er^{3+} 的周围是 Yb^{3+} , 大都选择 $1N_{\text{Er}} < N_{\text{Yb}} < 10N_{\text{Er}}$ (与基质材料有关系)。如果高 Er 浓度下, $N_{\text{Yb}}/N_{\text{Er}}$ 太小, Er^{3+} 可能会成簇, Yb^{3+} 到 Er^{3+} 的能量传递效率低, 如果 $N_{\text{Yb}}/N_{\text{Er}}$ 太大, 就要考虑 Yb^{3+} 成簇问题, 这时 Yb^{3+} 就不会将能量传递给 Er^{3+} , 必将浪费泵浦能量, 放大器效率降低。因此, 可以根据粒子数反转情况对铒浓度及铒铕浓度比进行优化。

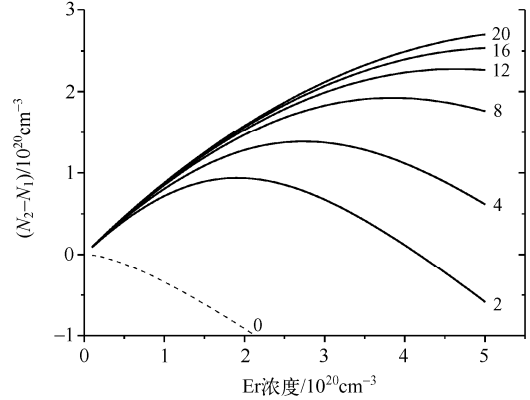


图 10.16 确定 Yb 浓度下反转数随 Er 浓度的变化曲线

10.4 光波传输方程

已建立的速率方程中包含跃迁几率 W_{13} 、 W_{12} 、 W_{21} 等参数, 这些参数与光强紧密相关。在光波导放大器中, 光强的横向分布和沿功率传输方向的演变都不是预先知道的, 因而速率方程不能独立求解。一般 EDFA/EDWA 的设计基础必须包括三个方面, 即描述截面上光强分布的波导模式场特性; 描述 Er^{3+} 能级分布的速率方程; 描述泵浦光和信号光功率在传播方向上变化行为的光波传输方程。

前两部分都已做了详细介绍, 这里来讨论光传输方程。

如图 10.17 所示, 假定波导介质沿传播方向是均匀的, 则波导各横截面上的光强分布形状将是完全相似的, 仅仅是比例上的变化。如果采取归一化形式则分布就是完全相同的。所以, 定义一个归一化光强, 将使计算更加方便, 它是一个与 z 无关的量

$$\psi(x, y) = I(x, y, z) / P(z) \quad (10.4-1)$$

式中, $P(z)$ 为光功率, 显然

$$\int \psi(x, y) dx dy = 1 \quad (10.4-2)$$

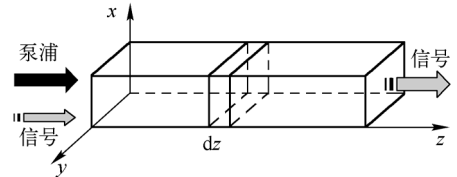


图 10.17 光波导信号传播示意图

在波导路径上 $z \sim z + dz$ 区段内光强的变化 dI 是由于 Er^{3+} 离子的辐射和吸收过程共同作用的结果, 因而对信号光应有

$$dI_s = (W_{21}N_2 - W_{12}N_1)h\nu_s dz \quad (10.4-3)$$

因 $W_{ij} = \sigma_{ij}I / h\nu_s$, 故

$$dI_s / dz = (\sigma_{\text{Er-e}21}N_2 - \sigma_{\text{Er-a}12}N_1)I_s(z) \quad (10.4-4)$$

利用式 (10.4-1), $I_s = \psi_s P_s$, 得

$$\psi_s(x, y) dP_s / dz = (\sigma_{\text{Er-e}21}N_2 - \sigma_{\text{Er-a}12}N_1) \psi_s(x, y) P_s(z)$$

方程两边对波导截面积分，并考虑到波导的传输损耗，得信号光的传输方程为

$$dP_s(z, \nu_s)/dz = [\gamma_{21}(z, \nu_s) - \gamma_{12}(z, \nu_s)]P_s(z, \nu_s) - \alpha_s P_s(z) \quad (10.4-5)$$

$\gamma_{21}(z, \nu_s) - \gamma_{12}(z, \nu_s)$ 为增益系数， $\gamma_{21}(z, \nu_s)$ 为辐射系数， $\gamma_{12}(z, \nu_s)$ 为吸收系数，有

$$\gamma_{21}(z, \nu_s) = \iint_A \psi_s(x, y) \sigma_{\text{Er-e}21}(\nu_s) N_2(x, y, z) dx dy \quad (10.4-6)$$

$$\gamma_{12}(z, \nu_s) = \iint_A \psi_s(x, y) \sigma_{\text{Er-a}12}(\nu_s) N_1(x, y, z) dx dy \quad (10.4-7)$$

同理，泵浦光的传输方程可表示为

$$dP(z, \nu_p)/dz = -\gamma_p P(z, \nu_p) - \alpha_p P(z) \quad (10.4-8)$$

其中 $\gamma_p(z) = \iint_A \psi_p(x, y) [\sigma_{\text{Er-a}13}(\nu_p) N_1(x, y, z) - \sigma_{\text{Er-e}31}(\nu_p) N_3(x, y, z) +$

$$\sigma_{\text{ESA}}(\nu_p) N_3(x, y, z) + \sigma_{\text{Yb-a}89}(\nu_p) N_8(x, y, z) - \sigma_{\text{Yb-e}98}(\nu_p) N_9(x, y, z)] dx dy \quad (10.4-9)$$

另外，由于自发辐射的存在而引起的放大器噪声也是一个必须考虑的问题。波导中 Er^{3+} 的自发辐射在传播过程中同样会得到放大，但是它不携带调制信号，因而会在输出端形成噪声干扰。包括正反两个方向的放大的自发辐射(ASE)的传输方程为

$$dP_{\text{ASE}\pm}(z, \nu_j)/dz = \pm[\gamma_{21}(z, \nu_j) - \gamma_{12}(z, \nu_j)]P_{\text{ASE}\pm}(z, \nu_j) \pm m h \nu_j \Delta \nu \gamma_{21}(z, \nu_j) \quad (10.4-10)$$

式中， m 是信号光导模个数， ν_j 和 $\Delta \nu$ 为 Er^{3+} 自发辐射谱经离散化后的第 j 个取样中心频率和取样频宽，设取样数目为 M ， $j=1 \sim M$ 。

长为 L 的波导两端面边界条件为：

$$P_p(0, \nu_p) = P_{p0}, \quad P_s(0, \nu_s) = P_{s0}, \quad P_{\text{ASE}+}(0, \nu_j) = P_{\text{ASE}-}(L, \nu_j) = 0$$

传输方程中的吸收和辐射系数 γ_{12} 、 γ_{21} 、 γ_p 等均与相关能级上粒子的布居数 N_i 有关，因此传输方程必须与电磁场分布和速率方程联立求解。数值计算可采取 Runge-Kutta 法，根据光强分布，在横截面各处求解速率方程，得到 $N_i(x, y)$ ，然后积分求出相关系数 $\gamma(z)$ 。

10.5 放大器增益特性

1. 放大器增益

放大器增益 G 用分贝数(dB)表示，如果输入信号光功率为 P_{s0} ，输出信号光功率为 P_s ，则

$$G = 10 \lg(P_s / P_{s0}) \quad (10.5-1)$$

以一个 $\text{Er:Al}_2\text{O}_3$ 脊形光波导放大器为例加以分析，截面如图 10.18 所示。导波芯层厚度为 $1\mu\text{m}$ ，折射率 $n_1=1.6$ ，脊宽 $3\mu\text{m}$ ，脊高 $0.5\mu\text{m}$ ；衬底缓冲层是折射率 $n_2=1.51$ 的 SiO_2 ；覆盖层是空气。建模区域为 $6\mu\text{m} \times 6\mu\text{m}$ 。

这一波导对 1530nm 的信号光有两个导波模式

E_{11}^x 和 E_{11}^y ，对 980nm 波长的泵浦光有六个导波模式，分别为 E_{11}^x 、 E_{21}^x 、 E_{31}^x ， E_{11}^y 、 E_{21}^y 、 E_{31}^y ，其中， E_{31}^y 在近截止状态，图 10.19 分别示出了 E^x 模的场分布。电磁场主要分布在脊形 $\text{Er:Al}_2\text{O}_3$ 波导芯层内，由于芯层与缓冲层之间的折射率差小于芯层与覆盖层的折射率差，因

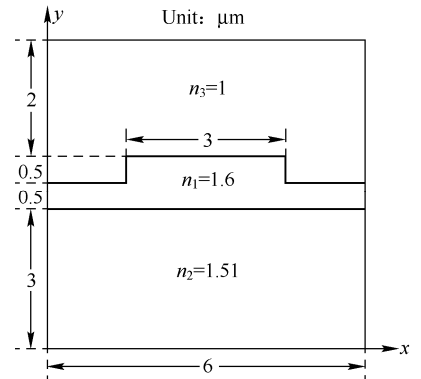


图 10.18 脊形 $\text{Er:Al}_2\text{O}_3$ 光波导截面

此，各模在缓冲层中穿透深度稍大一些。

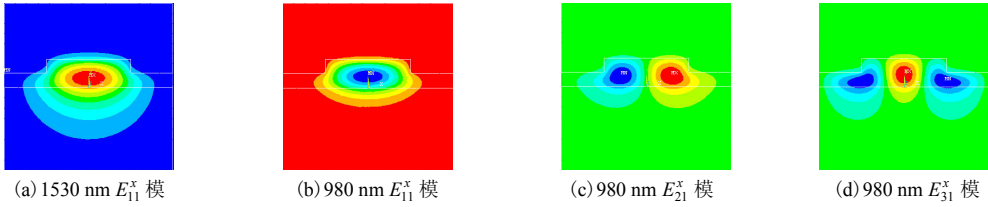


图 10.19 脊形 Er:Al₂O₃ 光波导模场

由模式理论可得 1530 nm 和 980 nm 光波的归一化光强分布，见图 10.20 (a) 和 (b)。已知光功率，由式 (10.4-1) 可确定 z 处波导截面的实际光强分布，根据速率方程可进一步得到铒离子的布居和反转情况，再由传输方程就可以分析增益特性了。

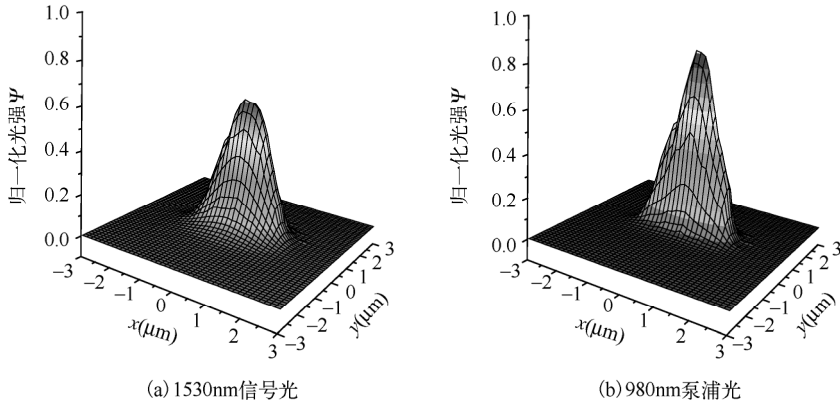


图 10.20 归一化光强分布

图 10.21 和图 10.22 是以泵浦功率为参变量，分别给出的掺铒波导放大器 (EDWA) 和铽铒共掺波导放大器 (YECDWA) 增益随波导长度变化的特性曲线。增益的变化存在上升和下降两个区域。初始阶段，信号光很弱，式 (10.4-5) 中的增益系数 $\gamma_{21}(z, \nu_s) - \gamma_{12}(z, \nu_s)$ 近似为常数，增益沿波导线性增加，之后，增速减小。这一方面是由于随信号光不断增强，饱和效应使增益系数不断下降；另一方面，随放大过程的能量消耗，泵浦功率下降，从而反转粒子数减小，也使增益系数随之下降，因此增益增长缓慢。到某一长度处，增益系数等于波导损耗系数时，信号不再被放大，增益达到最大值。超过此长度，随反转粒子数和增益系数的继续下降，信号反而因增益不抵损耗，直至因吸收和损耗而减小，增益处于下降区。因此就放大器的净增益而言，存在一个最佳波导长度，并且该长度与泵浦功率有关。

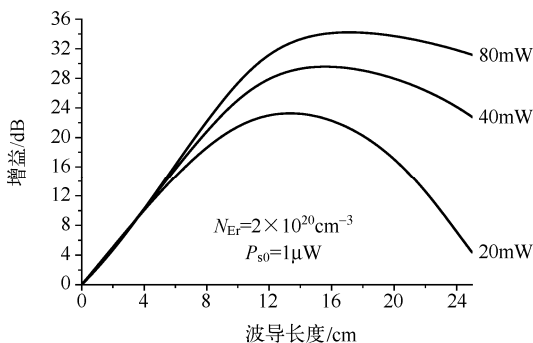


图 10.21 EDWA 增益与波导长度的关系曲线

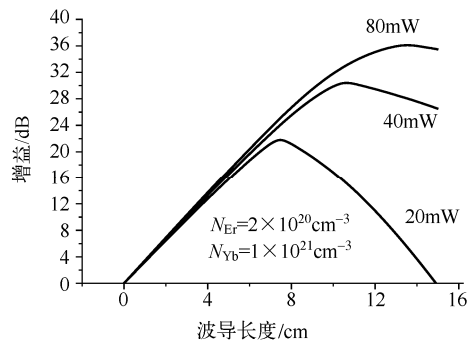


图 10.22 YECDWA 增益与波导长度的关系曲线

YECDWA 在增益上升区和下降区的线性特征更加显著。为得到较高增益, 需要更长的波导和更高的泵浦功率。对 EDWA, $N_{Er}=2\times 10^{20}\text{cm}^{-3}$, 40mW 泵浦时, 16cm 可得约 28dB 最大增益; 在同样的掺杂和泵浦条件下, YECDWA 最大可获得约 32dB 的增益, 且放大器长度只需 10cm。

2. 偏振特性

图 10.23 所示为掺铒波导放大器信号光增益的偏振特性曲线(实线为 E_{11}^x 模, 虚线为 E_{11}^y 模, $N_{Er}=1\times 10^{20}\text{cm}^{-3}$)。将光纤输出偏振光分别按波导的 x 和 y 方向进行耦合, 实现信号光在波导内的单模传输, 并分别具有 x 偏振和 y 偏振特性。计算结果表明放大器的增益是与偏振方向有关的, 而且 x 偏振的信号光获得的增益较大。这是因为脊波导中 x 偏振的 E_{11}^x 模和 y 偏振的 E_{11}^y 模的场分量在空间的分布不同所致。同时由图可知, 对确定的放大器长度, x 偏振和 y 偏振增益均随泵浦功率的增加而增加, 但增速减小并趋于饱和。

3. 噪声特性

1530nm 附近的自发辐射是掺 Er 光波导放大器中的一个重要问题。它与 1530nm 光信号伴生, 一起参与放大物质粒子的受激辐射, 与信号竞争。一方面, 当放大的自发辐射(ASE)引起的上能级粒子数衰减与其他弛豫过程(自发辐射与无辐射跃迁)造成的衰减可以比拟时, 反转粒子数将显著下降, 因而增益系数也随之下落, 导致放大器的总增益下降, 即 ASE 造成增益饱和效应。另一方面, ASE 传到接收端, 对信号光进行检测时, 与信号光一起形成拍频噪声。这必将降低放大器输出信号的信噪比, 限制光接收机的灵敏度, 对放大器特性而言是一个不利因素。放大器越长, 增益系数越大, ASE 就越严重。与光纤放大器相比, 虽然波导放大器长度大大缩短, 但由于掺杂浓度较高, ASE 的影响仍然不能忽略。因此研究放大器的噪声特性对信息领域的应用至关重要。

噪声系数由伴随信号光出来的正向自发辐射功率来计算, 通过求解放大的自发辐射谱, 考虑信号与 ASE 的差拍噪声, 沿放大器传播方向的噪声系数表达式为

$$NF(z) = 10 \lg \left[\frac{1}{G(z)} \left(1 + \frac{P_{ASE+}(z, \nu_s)}{h\nu_s \Delta\nu} \right) \right] \quad (\text{dB}) \quad (10.5-2)$$

式中, ν_s 为信号频率, $G(z)$ 为放大器的增益, $\Delta\nu$ 为将自发辐射谱进行离散后的频率间隔。由于 G 和反转粒子数有关, P_{ASE} 与上能级粒子数有关, 二者又和随波导长度变化的泵浦功率有关, 因此, 和放大系数一样, 噪声系数也与泵浦功率和波导放大器长度有关。

噪声系数可为光通信系统中集成放大器的使用提供重要信息。一般 980nm 泵浦的掺铒光纤放大器理想的量子极限噪声是 3dB, 与其相比, 波导放大器的噪声要高一些。一般的放大器, $NF > 3\text{dB}$ 。

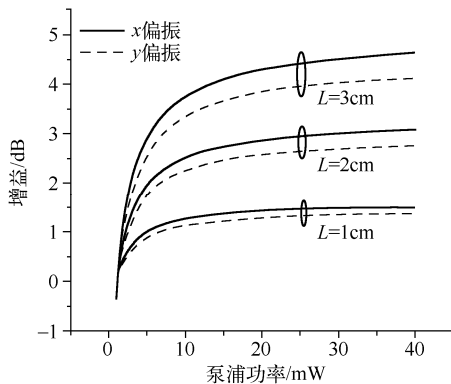


图 10.23 EDWA 的偏振特性曲线

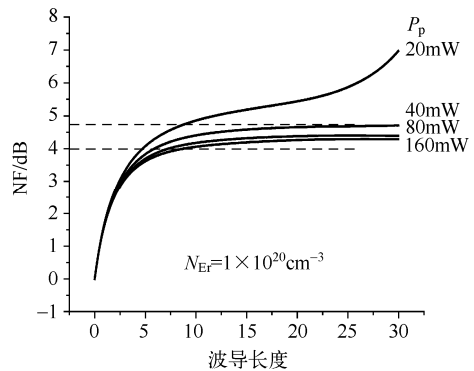


图 10.24 不同泵浦功率下, 噪声系数与掺铒波导长度的关系曲线

图 10.24 是 EDWA 在不同的泵浦功率下, 噪声系数 NF 随放大器长度的变化曲线。随着泵浦功率的增大, 充分泵浦, 粒子数反转度提高, NF 减小。一定的泵浦功率下, 噪声系数沿传输方向的变化, 可分为三个阶段。初始时, G 增大, 正向自发辐射功率也增大, 式(10.5-2)中主要是第二项起作用, NF 增加较快。第二阶段, 光波传输一定距离后, 随着信号光不断增强, 饱和效应使增益系数不断下降, 增益增长变缓, 式(10.5-2)中第一项的作用与第二项相当, 使 NF 的变化也非常缓慢。第三阶段, 随着增益系数的继续下降, 以及泵浦功率减小到不足以实现粒子数反转, G 快速减小, 正向自发辐射功率也减小。这时式(10.5-2)中第一项起主要作用, $1/G$ 快速增大, 从而导致很高的噪声系数。

在确定的泵浦功率和掺杂浓度下, 通常将能获得的最大增益对应的波导长度设为最佳长度, 但这时的噪声系数已经开始迅速增加, 因此这一长度并不是波导放大器的理想长度。设计波导放大器时需考虑噪声系数这一限制因素。

噪声系数还与掺杂浓度有关系, 图 10.25 为 EDWA 在泵浦功率 80mW, 放大器长 20cm, 掺铒浓度分别为 $1 \times 10^{20} \text{cm}^{-3}$ 、 $2 \times 10^{20} \text{cm}^{-3}$ 、 $3 \times 10^{20} \text{cm}^{-3}$ 时的噪声系数沿波导的变化情况, 随浓度的增加, 噪声系数也增加, 在放大器输出端依次为 4.2dB、4.8dB、5.8dB。任何器件都存在物理上的局限性, 在波导技术中亦是如此。为在较短光路上获得高增益, 需提高掺杂浓度; 但另一方面, 高掺杂浓度会导致增益与噪声参数的恶化, 甚至引起浓度猝灭, 因此需要在这二者之间进行折中。比较合适的选择是, 对 EDWA, 每厘米获得 2~3dB 的增益即可, 这意味着制作一个 EDWA 需要 5~10cm 长的波导。而对 YECDWA, 每厘米可获得约 4dB 的增益, 波导长度会更短, 噪声系数相比 EDWA 也要小。

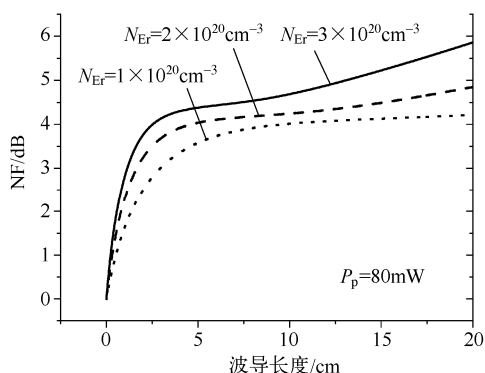


图 10.25 不同掺铒浓度下, EDWA 噪声系数比较曲线

4. 增益带宽

如果光放大器的增益与信号光波长无关, 则可以在不降低增益的情况下增加信道数目, 提高通信容量, 并且降低噪声和误码率, 所以其性能好, 应用价值高。对于掺铒光放大器, 铒离子能级 $^4I_{15/2}$ 至 $^4I_{13/2}$ 的吸收谱以及 $^4I_{13/2}$ 至 $^4I_{15/2}$ 的发射谱决定了放大器在 1530nm 波段的增益与波长有关, 增益谱线不平坦, 其形状与发射谱比较接近。而铒离子的发射谱还与基质材料有关, 所以从增益的角度考虑, 需要使铒离子具有较宽、较强的发射谱且能实现高浓度掺杂的基质材料, 以获得较强、较宽的增益谱。同时为获得较平坦的增益谱, 需要对光放大器加以设计, 如泵浦方式、放大器结构、长度等; 还可以采用经过设计的增益平坦滤波器, 有效地抑制输出光谱中的高增益部分, 一般平坦增益宽度约为 40nm。

习题

10-1 基本概念: 基态吸收, 激发态吸收, 合作上转换, 交叉弛豫, 能量传递, 斯塔克效应, 粒子数反转, 归一化光强分布, 阈值泵浦功率, 速率方程, 传输方程, 放大器增益, 放大器噪声。

10-2 简述平面光波导放大器的基本原理, 以及其应用在光通信系统中的优点。

- 10-3 下面哪些波长的光可以用来泵浦掺铒光纤放大器：980nm，982nm，855nm，1350nm，1480nm。
- 10-4 简要分析影响粒子数反转的因素。
- 10-5 讨论增益饱和效应。
- 10-6 试分析对于确定的泵浦功率，波导放大器存在一个最佳长度。
- 10-7 Yb-Er 共掺光波导放大器在哪些方面优于掺 Er 光波导放大器？
- 10-8 光放大器的主要特性指标是什么？

第 11 章 光子晶体波导

1987 年美国 Bell 实验室的 E.Yablonovitch 和 Princeton 大学的 S.John 在研究如何抑制自发辐射和无序电介质材料中的光子局域时,借鉴了半导体晶体及其电子带隙理论,首次各自独立地提出了光子晶体(PC: Photonic Crystal)的概念。众所周知,在半导体材料中,由于晶体周期势场的作用,薛定谔方程的解显示电子会形成能带结构,带与带之间有带隙,也称禁带。如果将不同介电常数的介质在空间按一定的周期结构排布,当排布周期与光波长相当时,求解电磁场方程表明,电磁波的传输特性具有和半导体电子能带类似的电磁波能带结构,这种能带结构称为光子能带(Photonic Energy Band)。如果电磁波频率在光子能带之间的频率范围内,则不能在光子晶体中传播,这一频率区域称为光子禁带或光子带隙(PBG: Photonic Band Gap)。光子晶体的这一特性为在波长尺度上控制和引导光波提供了新方法,也导致了新型光学器件的产生。

利用光子晶体对禁带光波形成反射墙,可以制作低损耗电介质全向反射镜、光子晶体滤波器、耦合器、光子晶体偏振器、低阈值光子晶体激光器、光子晶体高效发光二极管、光子晶体波导、光子晶体光放大器等。在光子晶体中引入点缺陷,可制作高品质因子(Q 值,描述谐振腔性能的重要参数)谐振腔,即光子晶体微谐振腔, Q 值一般大于 10^3 ,甚至可达 10^{10} ;引入线缺陷,则可制成光子晶体波导。依据全内反射原理的一般导波器件即使只有小角度弯曲,也会有极大的能量损失。而光子晶体导波在 90° 大曲率弯曲情况下,理论上仍可以接近 100% 导光。根据光子晶体禁止落在光子带隙内的光波在其内部传播的特性,在二维光子晶体的垂直于空气孔或介质柱方向引入线缺陷,就得到了平面型光子晶体波导,其几乎为零的弯曲损耗更利于器件的小型化和集成化。而光子晶体光纤通常由石英玻璃和轴向空气孔在微尺寸上周期排列、在纤芯处引入缺陷而成,该种结构可将特定频率的光波束缚在纤芯内传播。如果是空气芯光子晶体光纤,其传输损耗可以降至极低,更特别的是光子晶体光纤几乎在所有的传播波长处都能够通过设计实现单模运转。

光子晶体的晶格尺度和光的波长具有相同的数量级,对于光通信波段,通常光子晶体的晶格约为几百纳米,因此在制备技术和工艺上要求很高。光子晶体光纤可以采用石英毛细管集束法和挤压法来制作带有微孔结构的预制棒,再经拉丝而获得。一般的光子晶体可采用微电子工艺,胶体颗粒自组织生长,电子束、离子束刻蚀,多光束干涉,二维光子晶体多层叠加,介质条堆积等方法获得。通过人工控制光子晶体中介电材料的折射率差、光子晶体的微周期性结构和填充率等,可以制备出具有各种带隙的光子晶体。

本章主要介绍光子晶体理论和光子晶体波导。

11.1 光子晶体理论

11.1.1 光子晶体结构与两种晶格

具有周期性介电常数分布的光子晶体结构如图 11.1 所示。其中一维光子晶体是由介电常数不同的两种介质薄膜交替排布而形成的,折射率只在一个方向呈周期性变化,如法布里-珀

罗腔光学多层增反/增透膜，一维光子晶体光纤中折射率沿径向周期分布的同轴圆柱膜等。二维光子晶体是介电常数在二维空间呈周期性排列的结构，如介质柱在空气背景中的周期排列，或空气孔在介质基底上的周期排列，介电常数在平行于柱或孔的方向保持不变。三维光子晶体是介电常数在三维空间均呈周期性排列的结构，相对比较复杂，如由介质条组成的木堆积结构，由介质微球组成的蛋白石结构或反蛋白石结构等。

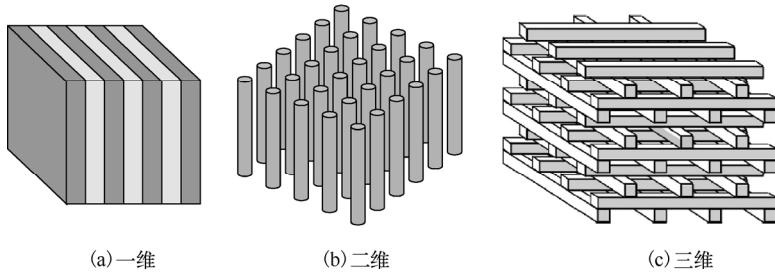


图 11.1 光子晶体结构示意图

由于和普通晶体在结构和研究方法上有一定的类比性，光子晶体研究中借用了许多固体物理中的概念，如晶格 (lattice)、布拉维格子 (bravais lattice)、原胞 (primitive cell)、倒格子 (reciprocal lattice)、布里渊区 (Brillouin zone)、布洛赫 (Bloch) 函数等。为此，有必要对晶体知识做一简单介绍。

晶体是由相同的基元 (普通晶体为原子或分子，光子晶体则为介质) 有规则周期性重复排列组成的空间点阵。点阵中基元所在位置的空间点称为格点，由格点及其形成的直线族和平面族组成了晶格。如果每一格点上有完全相同的基元，则称为布拉维格子。如果晶体由两种或两种以上基元构成，每种基元构成子晶格，各子晶格结构相同，它们相对位移，则形成复式格子，例如金刚石、NaCl 结构。

基元沿空间三个方向等效平移的最小距离，为晶体的三个周期。以格点为顶点、周期为边长的平行六面体称为固体物理学原胞 (原胞)，它是晶体的最小重复单元。代表原胞三边的矢量 \vec{a}_1 、 \vec{a}_2 、 \vec{a}_3 称为基矢 (一维和二维问题只有一个和二个基矢)，如图 11.2 所示。原胞的选取不是唯一的，但它们的体积是相等的，原胞体积可表示为 $\Omega = \vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3)$ ，而任一格点的位置可表示为

$$\vec{R} = l\vec{a}_1 + m\vec{a}_2 + n\vec{a}_3 \quad (11.1-1)$$

其中 l 、 m 、 n 为整数， \vec{R} 称为晶格矢。如果以一个格点为原点，作原点与其邻近格点连线的中垂面或中垂线，由这些中垂面或中垂线围成的最小体积或面积则为维格纳-塞茨原胞 (W-S 原胞)，见图 11.3。

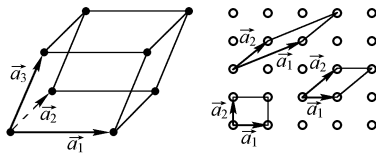


图 11.2 原胞与基矢

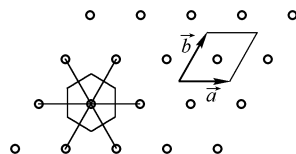


图 11.3 W-S 原胞、晶胞与晶胞基矢

实际分析中，在反映晶体周期性的同时，又能反映每种晶体的对称性，因而选取的重复单元不一定最小，格点不仅可以在平行六面体顶角上，也可以在面心或体心处。这种按对称性选取的单元称为结晶学原胞 (晶胞) 或布拉维原胞，基矢沿空间对称轴方向，一般用 \vec{a} 、

\vec{b} 、 \vec{c} 表示。如立方晶体的晶胞有简立方(SCC)、体心立方(BCC)、面心立方(FCC)等,其体积通常是原胞体积的整数倍。对某些问题的分析和处理,有时定义大体积晶胞(超晶胞)也是非常有用的。

晶格中任意两个格点连成的直线为晶列,任意三个不共线的格点构成的平面为晶面,晶格中有无限多的晶列族和晶面族。根据式(11.1-1)两格点连线矢量可表示为

$$\Delta\vec{R} = \Delta l\vec{a}_1 + \Delta m\vec{a}_2 + \Delta n\vec{a}_3$$

Δl 、 Δm 、 Δn 仍为整数,将其化为互质的整数 l_1 、 l_2 、 l_3 , 记为 $[l_1 l_2 l_3]$, 这就是表示某一晶列族的晶列指数。

对某一晶面族,其法线方向单位矢量 \vec{n} 在布拉维原胞三个基矢方向的投影之比,可按比例约化为三个互质整数比 $h_1:h_2:h_3$, 记为 $(h_1 h_2 h_3)$, 这就是表示晶面族的密勒指数。

实际上,每个晶体结构都有两种晶格,一种是三维位置空间的晶格,另一种是倒易空间的晶格。由于格子的基矢不一定正交,为了研究晶体结构方便,引入了一组与之正交的矢量,称为倒格子基矢,用 \vec{b}_1 、 \vec{b}_2 、 \vec{b}_3 表示,其定义为

$$\vec{b}_1 = \frac{2\pi}{\Omega} \vec{a}_2 \times \vec{a}_3, \quad \vec{b}_2 = \frac{2\pi}{\Omega} \vec{a}_3 \times \vec{a}_1, \quad \vec{b}_3 = \frac{2\pi}{\Omega} \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \quad (11.1-2)$$

\vec{a}_1 、 \vec{a}_2 、 \vec{a}_3 为正格子基矢, $\Omega = \vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3)$, 为由三个基矢决定的平行六面体的体积。正格子基矢与倒格子基矢有正交关系

$$\vec{a}_i \cdot \vec{b}_j = 2\pi\delta_{ij} \quad (11.1-3)$$

从几何关系上, \vec{b}_1 、 \vec{b}_2 、 \vec{b}_3 分别沿晶面族 a_2a_3 、 a_1a_3 、 a_1a_2 的法线方向,如图 11.4 所示。

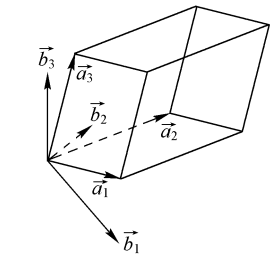


图 11.4 基矢与倒格子基矢

由倒格子基矢张成的空间称为倒格子空间。在倒格子空间,引入倒格矢 \vec{G}

$$\vec{G} = h_1\vec{b}_1 + h_2\vec{b}_2 + h_3\vec{b}_3 \quad (11.1-4)$$

其中 h_1 、 h_2 、 h_3 为整数。可以证明倒格矢与正格子晶面族 $(h_1 h_2 h_3)$ 正交,倒格矢和晶格矢满足 $\vec{G} \cdot \vec{R} = 2n\pi$ 。倒格矢的端点为倒格点,所有倒格点构成了倒格子空间的晶格,显然,倒格子具有对任意倒格矢的平移不变性。类比原胞,引入倒格子原胞来描述倒格子的周期重复特性。从倒格子点阵中,任选一倒格点作为原点 Γ (波矢为 0),作出它最近邻点的倒格点矢量,并作出每个矢量的垂直平分面或线,这些面或线所围成的完整的最小区域就是常用的倒格子 W-S 原胞,称作第一布里渊区(1BZ)。次邻近点倒格矢的垂直平分面或线,与第一布里渊区边界所围的区域为第二布里渊区,依此类推。

图 11.5 示出了正方格和三角格的原胞和对应的布里渊区。其中正方格的晶格常数为 a , 基矢 $\vec{a}_1 = a\vec{x}_0$, $\vec{a}_2 = a\vec{y}_0$, 倒格子基矢 $\vec{b}_1 = \frac{2\pi}{a}\vec{x}_0$, $\vec{b}_2 = \frac{2\pi}{a}\vec{y}_0$ 。三角格取原胞为平行四边形,晶格常数为 a , 基矢 $\vec{a}_1 = a\vec{x}_0$, $\vec{a}_2 = \frac{a}{2}(\vec{x}_0 + \sqrt{3}\vec{y}_0)$, 倒格子基矢 $\vec{b}_1 = \frac{2\pi}{a}(\vec{x}_0 - \frac{\sqrt{3}}{3}\vec{y}_0)$, $\vec{b}_2 = \frac{4\pi}{\sqrt{3}a}\vec{y}_0$ 。

由倒格子基矢量纲(m^{-1})可知,倒格子空

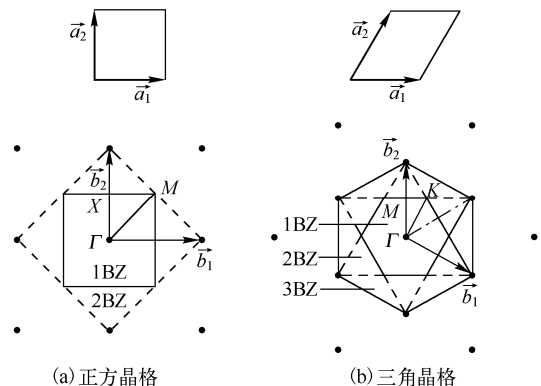


图 11.5 二维倒格子与布里渊区

间实际是一个波矢空间，它的引入简化了坐标空间周期函数的数学表示，同时因为波矢是描述光波传输的一个重要物理量，因此倒格子基矢及布里渊区在光子晶体分析中起着重要作用。

11.1.2 平面波展开法

光子晶体的研究方法有很多，如平面波展开法、传输矩阵法、时域有限差分法、多重散射法、有限元法等，其中平面波展开法提出最早、应用最广，也是我们要介绍的方法。它是将电磁波按平面波形式展开，把求解 Maxwell 方程问题转化为求解本征方程的本征值问题，从而得到光子晶体中电磁波的色散关系或能带结构。

无源电介质中的电磁波满足 Maxwell 方程： $\nabla \times \vec{E} = -\mu \dot{\vec{H}}$ 和 $\nabla \times \vec{H} = \varepsilon \dot{\vec{E}}$ ，其中 $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ ， $\mu = \mu_0$ 。对于单色电磁波 $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})e^{i\omega t}$ ， $\vec{H} = \vec{H}(\vec{r})e^{i\omega t}$ ，代入 Maxwell 方程，整理后得到关于电场和磁场的独立的微分方程

$$\frac{1}{\varepsilon_r} \nabla \times \nabla \times \vec{E} = \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E} \quad (11.1-5a)$$

$$\nabla \times \frac{1}{\varepsilon_r} \nabla \times \vec{H} = \frac{\omega^2}{c^2} \vec{H} \quad (11.1-5b)$$

方程式 (11.1-5) 两边取散度可得 $\nabla \cdot \vec{H} = 0$ ， $\nabla \cdot \varepsilon \vec{E} = 0$ ，因而 $\nabla \cdot \vec{E} \neq 0$ 。在非均匀介电常数的情况下， \vec{E} 是不连续的，而 \vec{H} 始终是连续的，所以求解关于磁场的方程较为方便。定义算符

$$\hat{F} = \nabla \times \frac{1}{\varepsilon_r} \nabla \times \quad (11.1-6)$$

$$\text{方程式 (11.1-5b) 表示为} \quad \hat{F} \vec{H} = \frac{\omega^2}{c^2} \vec{H} \quad (11.1-7)$$

它和薛定谔方程一样，是一个本征值方程。光子晶体中， ε_r 是一周期函数，所以算符 \hat{F} 也和电子在周期势场中的哈密顿算符一样具有周期性，方程的解一定满足平移对称性，同样可以用 Bloch 波来描述，简要证明如下。

设光子晶体晶格基矢为 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ ，任一晶格矢为

$$\vec{R}_l = l_1 \vec{a}_1 + l_2 \vec{a}_2 + l_3 \vec{a}_3 \quad (11.1-8)$$

周期性介电常数和周期性算符均满足

$$\frac{1}{\varepsilon_r}(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon_r}(\vec{r} + \vec{R}_l) \quad (11.1-9)$$

$$\hat{F}(\vec{r}) = \hat{F}(\vec{r} + \vec{R}_l) \quad (11.1-10)$$

如果 $T(\vec{R}_l)$ 代表一位移算符，表示移位 \vec{r} 至 $\vec{r} + \vec{R}_l$ ，那么有

$$T\hat{F}(\vec{r})\vec{H} = \hat{F}(\vec{r} + \vec{R}_l)\vec{H}(\vec{r} + \vec{R}_l) = \hat{F}(\vec{r})T\vec{H}$$

算符 \hat{F} 和 $T(\vec{R}_l)$ 有对易关系，二者有共同本征函数，用狄拉克符号表示，设为 $|\psi\rangle$ ，由

$$T|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle = |\psi(\vec{r} + \vec{R}_l)\rangle$$

得

$$T^n|\psi\rangle = |\psi(\vec{r} + n\vec{R}_l)\rangle = \lambda^n|\psi\rangle \quad (11.1-11)$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时，需 $|\psi(\vec{r} + n\vec{R}_l)\rangle$ 有限，因而本征值必满足 $|\lambda| = 1$ ，由此本征值可取如下形式

$$\lambda = e^{i\vec{K} \cdot \vec{R}_l} \quad (11.1-12)$$

\vec{K} 为待定的波矢, 令 $\vec{r}_n = \vec{r} + n\vec{R}_l$, 由上式得

$$|\psi(\vec{r}_n)\rangle = e^{i\vec{K} \cdot (\vec{r}_n - \vec{r})} |\psi(\vec{r})\rangle \quad (11.1-13)$$

即

$$|\psi(\vec{r}_n)\rangle e^{-i\vec{K} \cdot \vec{r}_n} = |\psi(\vec{r})\rangle e^{-i\vec{K} \cdot \vec{r}} \quad (11.1-14)$$

式(11.1-14)对任何 n 值、任何周期点都成立, 令

$$|\psi(\vec{r})\rangle e^{-i\vec{K} \cdot \vec{r}} = |u(\vec{r})\rangle$$

表明, 在坐标表象中, $|u(\vec{r})\rangle$ 是周期函数, 即

$$|u(\vec{r})\rangle = |u(\vec{r} + n\vec{R}_l)\rangle \quad (11.1-15)$$

$$|\psi(\vec{r})\rangle = e^{i\vec{K} \cdot \vec{r}} |u(\vec{r})\rangle \quad (11.1-16)$$

满足周期算符本征方程的本征函数, 必由一个平面波因子和一个周期函数组成, 这就是 Bloch 波。 \vec{K} 是 Bloch 波矢, 所以 $|\psi\rangle$ 是一个周期性调幅的平面波。

为求解方程式(11.1-7), 将光子晶体中磁场 Bloch 波函数按式(11.1-16)写成带有平面波因子的形式

$$\vec{H} = e^{i\vec{K} \cdot \vec{r}} \vec{H}_{\vec{K}} \quad (11.1-17)$$

这里 $\vec{H}_{\vec{K}}$ 是周期场函数, \vec{K} 为 Bloch 波矢。令 $\varphi = e^{i\vec{K} \cdot \vec{r}}$, 则 $\nabla \varphi = i\vec{K} \varphi$, 代回方程式(11.1-5b), 有

$$\nabla \times \frac{1}{\varepsilon_r} [\nabla \varphi \times \vec{H}_{\vec{K}} + \varphi \nabla \times \vec{H}_{\vec{K}}] = \frac{\omega^2}{c^2} \varphi \vec{H}_{\vec{K}}$$

$$\nabla \times \frac{\varphi}{\varepsilon_r} [i\vec{K} \times \vec{H}_{\vec{K}} + \nabla \times \vec{H}_{\vec{K}}] = \frac{\omega^2}{c^2} \varphi \vec{H}_{\vec{K}}$$

$$\text{继续矢量运算得} \quad i\vec{K} \times \frac{1}{\varepsilon_r} [i\vec{K} + \nabla] \times \vec{H}_{\vec{K}} + \nabla \times \frac{1}{\varepsilon_r} [i\vec{K} + \nabla] \times \vec{H}_{\vec{K}} = \frac{\omega^2}{c^2} \vec{H}_{\vec{K}}$$

定义厄米算符

$$\hat{A}_{\vec{K}} = (\nabla + i\vec{K}) \times \frac{1}{\varepsilon_r} (\nabla + i\vec{K}) \times \quad (11.1-18)$$

$$\hat{A}_{\vec{K}} \vec{H}_{\vec{K}} = \frac{\omega^2}{c^2} \vec{H}_{\vec{K}} \quad (11.1-19)$$

这是算符 $\hat{A}_{\vec{K}}$ 的本征方程, 本征值为 $\lambda = \omega^2 / c^2$, ω 称作本征频率。该方程可视作一个将波矢 \vec{K} 作为自由参数, 本征值 λ 和本征场 $\vec{H}_{\vec{K}}$ 未知的本征方程, 它是求解光子晶体带结构的基本方程。在前面的波导模式的描述中, 频率(或归一化频率)是自变量, 波矢或传播常数是待求的本征值。这里为了充分利用周期性的边界条件, 我们将波矢作为自变量, 本征频率作为待求量。

对于一维和二维问题, 矢量方程式(11.1-19)可以分离成独立的 TE 偏振和 TM 偏振的模方程, 每种偏振形式电磁场只有三个不为零的分量, 进一步可化为只含有一个分量的标量方程形式。对于三维问题, 解一般为混合模。但如果结构拥有镜像对称面, 则波矢一定在反射面内, 这时场模式分为奇模和偶模, 它们分别类似于 TM 模和 TE 模。因此为简单起见只需要分析偏振模式就可以了。

如果设定磁场沿 z 方向, 则将周期函数 $\vec{H}_{\vec{K}}$ 在倒格子空间按分立的傅里叶级数展开

$$\vec{H}_{\vec{K}} = \sum_m \vec{z}_0 h_m e^{i\vec{G}_m \cdot \vec{r}} \quad (11.1-20)$$

其中 \vec{G}_m 必须是倒格矢, 由于 $\vec{G} \cdot \vec{R} = 2n\pi$, 所以 $e^{i\vec{G}_m \cdot \vec{r}}$ 一定是晶格周期函数。将上面展开式代入方程式(11.1-19), 并利用 $e^{i\vec{G}_m \cdot \vec{r}}$ 函数系的正交性, 可以得到标量本征方程

$$\sum_m A_{lm} h_m = \lambda h_l \quad (11.1-21)$$

$$\text{其中矩阵元为} \quad A_{lm} = \int \frac{e^{i\vec{G}_m \cdot \vec{r}} e^{-i\vec{G}_l \cdot \vec{r}}}{\tau \mathcal{E}_l} d\tau (\vec{G}_l + \vec{K}) \cdot (\vec{G}_m + \vec{K}) \quad (11.1-22)$$

上述积分在原胞内进行， τ 为原胞面积。通过数值求解方程式 (11.1-19)，就可得到本征模式的色散关系或光子能带结构。

根据前面的分析，如果令 $\vec{K}' = \vec{K} + \vec{G}$ ， \vec{G} 是任意倒格矢，则 Bloch 函数为

$$\vec{H}(\vec{r}) = e^{i\vec{K}' \cdot \vec{r}} \vec{H}_{\vec{K}'}(\vec{r}) = e^{i\vec{K} \cdot \vec{r}} [e^{i\vec{G} \cdot \vec{r}} \vec{H}_{\vec{K}'}(\vec{r})] = e^{i\vec{K} \cdot \vec{r}} \vec{H}'_{\vec{K}}(\vec{r})$$

$\vec{H}'_{\vec{K}}(\vec{r})$ 仍是一个具有晶格周期的函数。可见同一个本征值 ω^2/c^2 有无穷多的波矢与之对应，随着波矢的变化，模频率周期性重复，这是具有周期结构系统的色散特性与波导模色散的明显不同。实际上相差一个倒格矢的任意两个波矢是等价的，确切地说，对任何波矢 \vec{K} 和倒格矢 \vec{G} ，每个模 i 我们都可以找到一个模 j ，满足 $\omega_i(\vec{K}) = \omega_j(\vec{K} + \vec{G})$ 。这一结果可使计算简单化，只需要在倒格子空间 (\vec{K} 空间) 的一个原胞内，即第一布里渊区内求解就可以了。更进一步，晶格除具有平移对称性外，还具有其他的对称性，如旋转、反演、反映等，通过这些空间对称操作可以得到最小的简约布里渊区，图 11.5 中的 $\Gamma XM \Gamma$ 和 $\Gamma MK \Gamma$ 围成的区域就分别是正方晶格和三角晶格的简约布里渊区。理论分析中，本征模群速度为零的点即本征频率的极值点出现在简约布里渊区的高对称点上，所以带隙的边缘在高对称点上。因此，计算带结构时波矢 \vec{K} 只需要在简约布里渊区内连续地取一系列含高对称点的值即可。

11.1.3 二维光子晶体带隙结构

存在光子带隙是光子晶体最突出的特征，带隙结构的计算也是设计光子晶体波导的前提。影响光子带隙的主要因素是光子晶体的晶格结构、介电常数比、填充率等，一般介电常数差别越大，得到光子带隙的可能性越大。目前，二维光子晶体晶格多采用四方晶格、六角晶格和三角晶格，而孔/柱的形状，如圆形、六角形、方形等对带隙也有影响。

二维光子晶体的本征模可分为 TE 模和 TM 模，TE 模的磁场平行于介质分界面，TM 模的电场平行于介质分界面，设二维光子晶体在 z 向是无限均匀的，TE 模电磁场分量有 H_z 、 E_x 、 E_y ，TM 模电磁场分量有 E_z 、 H_x 、 H_y 。利用平面波展开法可分别得到二维光子晶体的 TE 模和 TM 模的带隙结构。

对正方格介质柱型光子晶体，图 11.6 示出了相应的带结构。其中晶格周期 $a=1$ ，介质折射率 $n=3.34$ ，柱半径 $r=0.2a$ 。图中横轴为波矢，是在简约布里渊区沿路径 $\Gamma XM \Gamma$ 选取的一系列值；纵轴为频率，采用的是无量纲的归一化频率 $\omega a / 2\pi c$ ，即 a/λ ， λ 是光波波长。对于给定的每个波矢，可以得到无限多个本征解，每个解对应一个模式，有确定的本征频率，这里计算了 6 个模式。越是高频段，本征模式越多，但出现的带隙相对宽度 (带隙宽度与带隙中心频率之比) 越小，甚至无带隙，所以研究光子晶体带结构主要在低频段。光子带图显示，TM 模有两个带隙，即 $0.291 \sim 0.423$ ， $0.730 \sim 0.749$ ，但高频段带隙较窄，TE 模只在 0.833 附近有一极窄的带隙。

为了便于比较，考虑晶格常数为 a ，本底介质折射率为 3.6 ，孔半径 $r=0.46a$ 的三角格子圆空气孔型光子晶体，TE 模和 TM 模的光子能带结构如图 11.7 所示。可以看出，TE 模存在两个带隙，频率范围为 $0.310 \sim 0.501$ 和 $0.821 \sim 0.846$ ，后一个较窄，TM 模在 $0.398 \sim 0.451$ 范围内存在一个带隙。显然，这种晶体结构存在有完全光子带隙，即一定频率范围内的光子无论其偏振方向或传播方向如何都被禁止传播，是全方位的光子带隙。处于具有完全带隙光子晶体中的原子自发

辐射被禁戒。不完全光子带隙是指只对特定的偏振态或在特定方向上才存在的光子带隙。

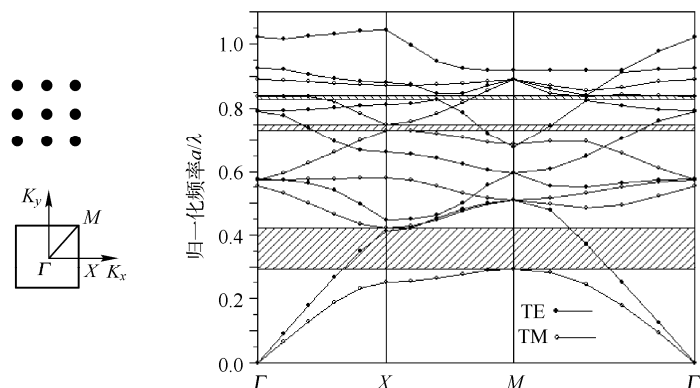


图 11.6 正方格子光子晶体的 TE 模与 TM 模带隙结构

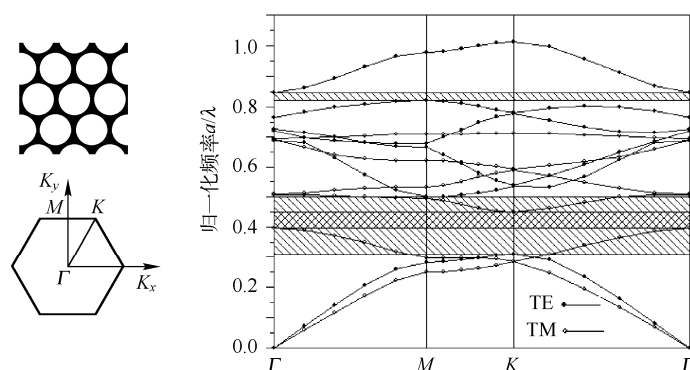


图 11.7 三角格子光子晶体的 TE 模与 TM 模带隙结构

TE 模和 TM 模具有不同的带隙结构，通常情况下，介质柱型光子晶体容易产生 TM 模带隙，而空气孔型光子晶体则容易产生 TE 模带隙，同时也更可能出现完全带隙。三角格子空气孔型光子晶体的填充率和折射率差对其带隙的影响如图 11.8 所示， $n=3.6$ 时， $r/a \approx 0.46$ 时 TE 模带隙最大，并有完全带隙存在；随着 r 的增大，完全带隙宽度增加。孔径确定时，随着折射率的增加，低频段带隙宽度增加，带隙中心下移，折射率大概要达到 3 以上时才可出现完全带隙。制作光子晶体要选择折射率大的光学材料，如硅、一些高折射的聚合物材料、III-V 族化合物及硫族材料等，通过对晶格结构、填充率和周期等参数的设计，从而获得某种光波长的带隙甚至完全带隙。

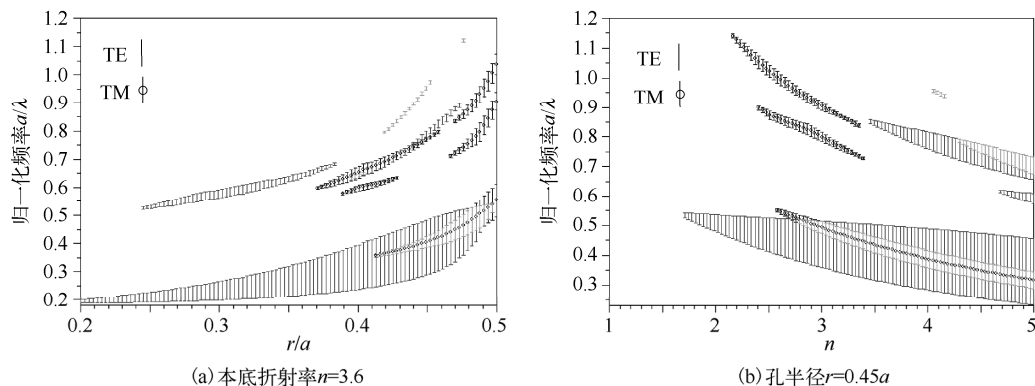


图 11.8 三角格光子晶体带隙宽度与位置随孔径和本底折射率的变化

11.2 光子晶体波导

11.2.1 二维光子晶体波导

光子晶体能作为波导材料是由于它拥有两个重要特性：光子带隙和缺陷模。光子晶体存在带隙，落在带隙内的光子态密度为零，这样的光波入射到光子晶体表面将全被反射，无法在介质中进行传播。但如果在周期性排列的介质中引入点缺陷，形成一微腔，破坏了原有的周期性，见图 11.9，这时光子晶体中就可能出现频率极窄的缺陷态，频率落在缺陷态中的光子将被此光子晶体微腔所俘获，而带隙中其他频率的光仍然被禁止传播。如果在光子晶体中引入线缺陷，光波就被限制在这个线通道内传导，这正是我们把线缺陷光子晶体叫做光子晶体波导的原因。缺陷可分为介电常数缺陷和结构缺陷，前者是缺陷位置的电介质被其他介质替换，后者是某个或某一系列基元的形状和尺寸发生改变。

对二维光子晶体，如果是介质柱的情况，导光区域是移走介质柱后的低折射率的空气区域。传统的电介质波导是通过全内反射导光的，只有在高介电常数区域内才能约束光的传播，但是，光子晶体波导是依靠光子带隙约束光波的，与中心填充材料的性质无关。这可以极大地减小光与物质的相互作用，如电介质材料对光的吸收、色散和非线性特性等。当然，作为光放大用的光子晶体波导则一般采用空气孔结构，移走孔制造线缺陷，以保证光在有源介质中传输。光子晶体波导同样可以有直线式、转角式、分叉式，对于弯曲波导，为降低损耗，还往往在转角处引入新的点缺陷。

对于图 11.9(a)和(b)所示二维光子晶体的点缺陷，由于光波被限制在缺陷内，如果考虑 z 向波矢 K_z 不为零，横向受到带隙的束缚作用，则光波只能沿 z 向传播，这是光子晶体光纤(微结构光纤)的情形。这里重点分析理想光子晶体在图 11.9(c)和(d)所示线缺陷中 K_z 为零的情况，光波在 xOy 面内传播，其本征模式还可以用 TE 模和 TM 模表示。

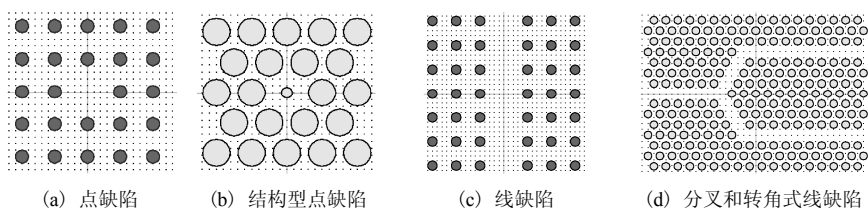


图 11.9 二维光子晶体缺陷

描述有缺陷的光子晶体系统，研究其带结构时需要选取一个含有缺陷的超晶胞进行计算。对图 11.9(c)中的波导，仍采用图 11.6 中的数据，由于在 y 轴方向仍有原来的周期，但 x 轴方向要有相当多的晶格才能获得精确的结果，因此取 9×1 个原胞组成的超晶胞。光子晶体波导 TM 模的带结构见图 11.10，表明频率在 $0.29 \sim 0.42$ 间仍存在带隙。由于缺陷的影响，其带隙和完整光子晶体的带隙稍有差别。该带结构的显著特征是在带隙中有一个能带，这个能带对应的就是一系列缺陷模。图 11.11(a)所示为其中一个线缺陷模

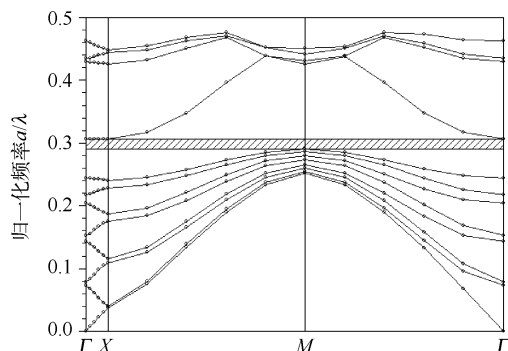


图 11.10 光子晶体线缺陷的带结构

的电场分量 E_z 的空间分布，显然模场被束缚在线缺陷区域中。 K_y 不为零的缺陷模就可以在波导中传播。而非带隙中的本征模场分布则不具有这一特征，如图 11.11 (b) 所示，图中 m 为能带序号，从 0 开始， K 为简约布里渊区中的点，对应一个波矢。

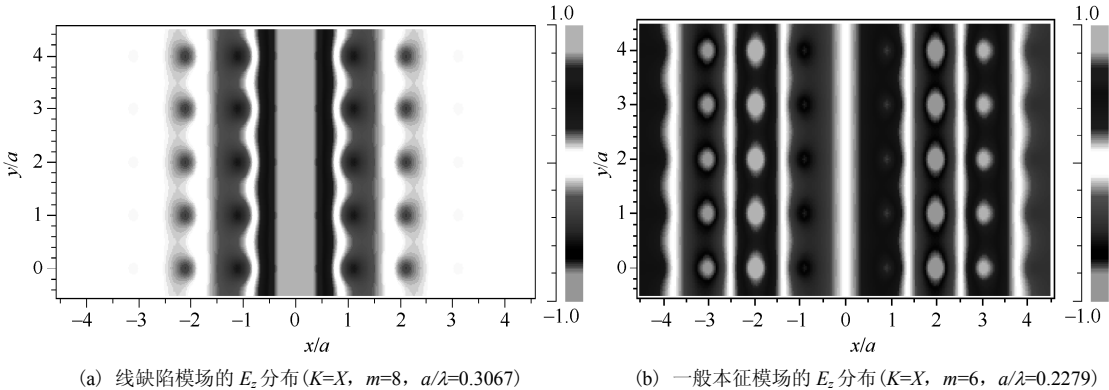


图 11.11 线缺陷光子晶体 TM 偏振的本征模场分布

11.2.2 二维平板光子晶体波导

在二维光子晶体结构中，介电常数在一个平面内（一般设为 xy 平面）呈周期性变化，而在第三个方向（ z 方向）是均匀且无限延伸的，所以理想二维光子晶体线缺陷中的光波只是在一个方向上受限。实际的二维光子晶体大多是在单层或多层薄膜上制备，是有限厚度的二维周期结构，一般薄膜厚度与晶格周期相当，这就是平板光子晶体，如图 11.12 所示。在这种结构上制作的线缺陷型光波导，为防止光波泄漏出平板，需采用有效折射率相对较低的衬底和覆盖层，在垂直于平板方向利用全内反射引导光在平板内传输，而在平行于平板方向则利用光子晶体带隙来约束光波，从而实现对光的二维或三维限制，形成三维光学腔或光波导结构。基于这个机制发展的二维平板光子晶体波导和器件，不仅具有光子晶体的性能优势，而且可以利用现有的半导体微纳米加工工艺制备。所以研究和发展的光子晶体器件主要采用二维平板结构。

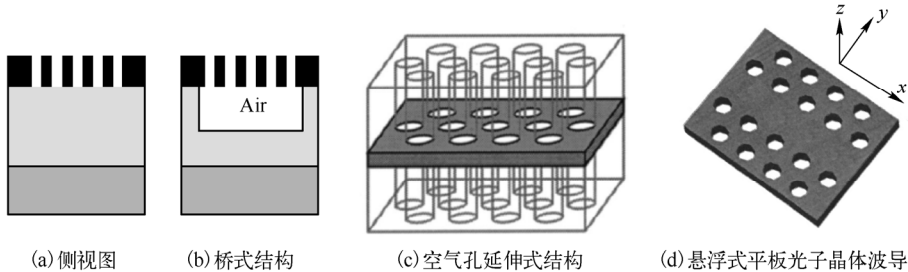


图 11.12 二维平板光子晶体

二维平板光子晶体的分析与二维光子晶体类似，但不能直接把二维的计算结果应用于三维的平板结构中。确定平板光子晶体特性时需特别考虑平板厚度、平板与衬底的折射率差，以及反映操作对称性等因素。由于介质在 z 方向分布不均匀且不具有周期性，通常波方程的解是混合模，但如果平板光子晶体结构关于平板中心 $z=0$ 平面有反映操作不变性，则本征模可分解为偶模（类 TE 模，电场在平板平面内）和奇模（类 TM 模，磁场在平板平面内）。但对平板而言，这种光子晶体结构的解中存在辐射模式，这些模的有效折射率比衬底或覆盖层的低，会向平板外辐射而最终损耗掉，为此我们利用“光锥”将辐射模滤除。

平板的厚度会影响到带隙的宽度和位置，对确定的折射率和柱/孔半径，存在最佳厚度。

通常对孔式结构,厚度以 $0.4a \sim 1.2a$ 为佳,一般选 $0.6a$ 左右;对柱式结构,一般选 $2a$ 左右。

图 11.13 示出了典型的桥式二维平板光子晶体能带结构,图中三角晶格参数:孔半径 $r=0.41a$,硅平板折射率 $n_{\text{si}}=3.478$,厚 $h=0.5a$ 。图中增加的“光线”是光在空气(有效折射率为 1)中的频率-波矢曲线,光线上部光锥区域是平板的辐射模式区域,只有工作于光锥下方的模式才有可能成为平板波导中的导模。能带图表明光锥下方偶模存在明显的导模带隙,频率范围为 $[0.318, 0.490]$,而在该带隙的上部近边缘处奇模也显示了一个略窄的带隙。进入导模带隙的平板光子晶体缺陷结构的本征模光场,将被约束在此缺陷结构中,可以用于构造出各种实际、可用的光子晶体器件。

按图 11.14(a)所示制造线缺陷,并用拉锥光纤实现光波的耦合,线缺陷模沿 x 方向传输(波矢沿六角格子 $\Gamma-K$ 方向)。图中的光子晶体波导芯层为 GeAsSe 材料,折射率为 2.7,孔周期 a 为 550nm ,孔半径为 $200\text{nm}(0.36a)$,膜厚 300nm ,这种结构是为了使 1550nm 附近的光波处于类 TE 模的带隙内。线缺陷平板光子晶体的带图(图 11.14(b))显示了两个导模 TE_0 和 TE_1 ,图中也给出了光纤的色散曲线。当光纤模式和波导模式相匹配时(图中两色散曲线的交叉处),拉锥光纤的倏逝波才能高效地耦合进波导。图 11.15 为光纤输出谱,可以看出耦合波长与带结构理论计算的值非常接近,当光纤与波导接触时,光纤透射率降至 -20dB ,耦合效率可达 98% 以上。

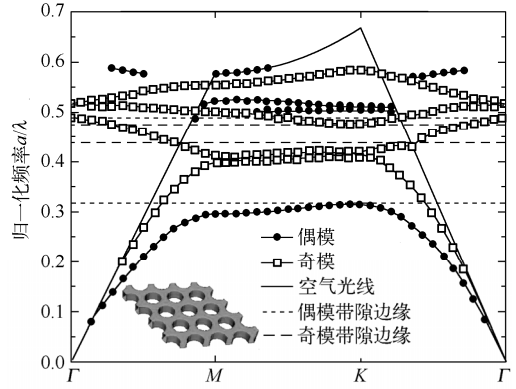


图 11.13 桥式二维平板光子晶体能带结构

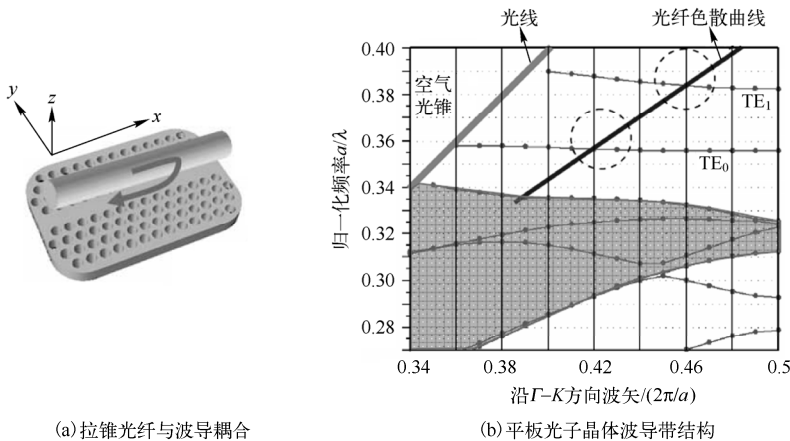


图 11.14 悬浮式二维平板光子晶体波导及其线缺陷模

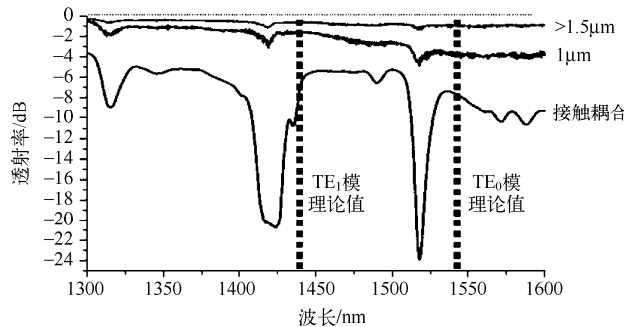


图 11.15 光纤输出谱

习题

11-1 基本概念：光子晶体，布拉维格子，倒格子，倒格矢，布里渊区，简约布里渊区，Bloch 波，光子带隙，完全带隙，点/线缺陷，缺陷模，平板光子晶体，光锥。

11-2 如图 11.6 所示的光子晶体结构，晶格常数为 660nm ，问何种波长的光波将受到阻止而无法传播？

11-3 如图 11.7 所示的某空气柱光子晶体能带结构，存在完全带隙，用其制备 1530nm 的光子晶体波导，只需 TE 模传播，周期需满足什么条件？若是偏振无关的波导，周期需满足什么条件？

11-4 说明二维平板光子晶体波导的导光机制。

11-5 根据图 11.14 (b) 的光子晶体波导带结构，如果光子晶体的周期为 465nm ，则两导模 TE_0 和 TE_1 的工作波长是多少？

第 12 章 光波导的制备

12.1 概 述

实用光波导有光纤(fiber)、平面光波导(plane optical waveguide)和带状光波导(strip optical waveguide)三类,它们都是由光透明介质构成的传输光频电磁波的导行结构。在不同折射率的介质分界面上,电磁波的全反射使光波局限在波导及其周围有限区域内传播。通常用矢量法、标量近似法、射线法等分析其传输特性,包括模式的场分布、色散及模式之间的耦合等。

图 12.1 是光纤结构的示意图。从传输模式上分,光纤有单模光纤和多模光纤,二者的纤芯半径 $2a$ 不同。从纤芯与包层的折射率来分,有阶跃光纤和梯度光纤,如图 12.1 (b) 和 (c) 所示。单模和多模光纤已成功地应用于光通信领域。

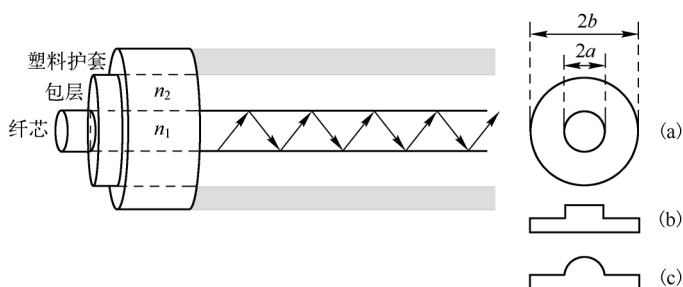


图 12.1 光纤结构示意图

平面光波导一般至少有三层介质,上层为覆盖层(通常为空气),中间薄膜为芯层,厚度约 $1\sim 10\mu\text{m}$,底层介质为衬底(见图 12.2 (a)),折射率关系是 n_2 和 n_3 都小于 n_1 。当薄膜的宽度为有限尺寸时,称为带状波导或条形波导(见图 12.2 (b)),此时光波能量主要集中在矩形带状结构中。也可以将中间层的薄膜刻蚀掉一部分(见图 12.2 (c))。有时在芯层和衬底间按照需要加一层隔离层,以防止芯层的电磁波泄漏太多(见图 12.2 (d))。

平面光波导主要用于制作无源/有源光波导元件,如调制器、光耦合器、分路器、可调光衰减器、光开关和阵列波导光栅,以及激光器、光波导放大器等。平面光波导结构能够将泵浦光能量约束在截面积非常小、长度较长的区域内,只需使用数厘米高浓度的掺铒增益介质,就可以得到常规掺铒光纤几十倍的单位长度光增益。特别是随着光子集成技术(PIC: photonic integrated circuit)的发展,有源/无源波导器件的应用也越来越广泛。

本章简要、定性地介绍光纤、平面光波导的制备工艺,特别是薄膜制备、表征和刻蚀等工艺和技术。

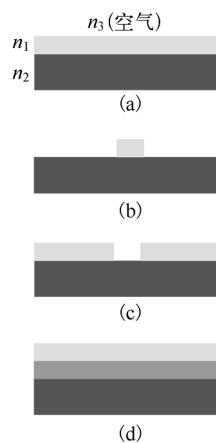


图 12.2 平面光波导示意图

12.2 光纤制造

通信用光纤大多数是由石英玻璃材料组成的。光纤制备工艺主要有两个步骤，一是制备光纤预制棒(坯棒)，二是光纤拉丝，即将预制棒放入高温炉软化后拉出线径很小的又长又细的纤维。

光纤预制棒制造技术是光纤制造工艺的核心，制备光纤预制棒的熔炼工艺叫两步法(two-step processes)：第一步采用四种气相沉积工艺，即改进的化学气相沉积(MCVD：modified chemical vapour deposition)、等离子体激活化学气相沉积(PCVD：plasma-activated chemical vapour deposition)、棒外气相沉积(OVD：outside vapour phase deposition)、气相轴向沉积(VAD：vapour phase axial deposition)等中的任一工艺来生产光纤预制棒的芯棒(core-rod/primary preform)；第二步是在气相沉积获得的芯棒上施加外包层制成大光纤预制棒。

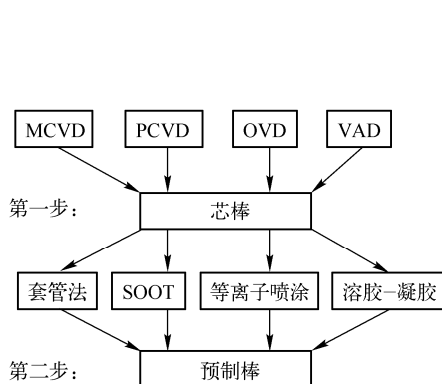


图 12.3 光纤预制棒制造工艺示意图

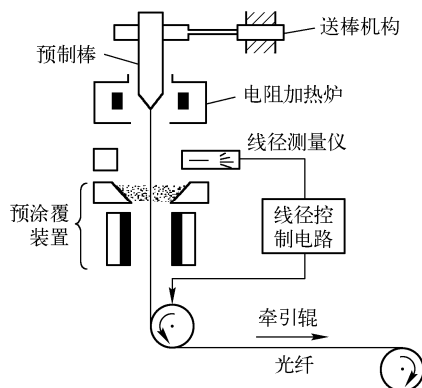


图 12.4 拉丝装置示意图

外包层技术(overcladding)有套管法、SOOT 法、等离子喷涂(Plasma Spray)法和溶胶-凝胶(Sol-Gel)法等。其中 SOOT 工艺(国外文献常用“soot process”泛指 OVD、VAD 等火焰水解外沉积工艺)技术简单，来源丰富，费用较低，生产的合成石英材料纯度高，有利于提高光纤的强度。SOOT 工艺的缺点是在生产过程中会产生氯化氢等废气，为保证沉积速率使得沉积效率很低，在烧结时需要用剧毒的氯气和昂贵的氦气。等离子工艺则以天然石英粉为原材料，资源非常有限，而且天然石英粉的纯度有限。该工艺采用的热源技术复杂，但优点在于不会产生 SOOT 工艺中的氯化氢废气，烧结时无需氯气和氦气，沉积之后就是透明的预制棒。

管棒法拉制工艺有两种：一是用预制棒直接在高温炉中加温软化拉制光纤；二是在芯玻璃的棒体上套上外包层的玻璃管，然后送入高温炉中加温软化拉制成光纤。具体过程为：当预制棒由送料机构以一定的速度均匀地送往管状加热炉中，预制棒尖端热到一定温度时，棒体尖端的粘度变低，靠自身重量逐渐下垂变细而成纤维，由牵引棍绕到卷筒上，纤维线径由激光线径测量仪监控。

12.3 薄膜制备

大多数平面光波导的制备是在薄膜波导的基础上完成的，薄膜制备对光波导器件的制作至关重要。制备薄膜的工艺和技术有很多，如蒸发法、溅射法、离子注入法、离子交换法、热扩散法、化学气相沉积法、聚合法、外延生长法、溶胶凝胶法和脉冲激光沉积法等。下面要介绍

的前四种方法属物理气相沉积(PVD: physical vapor deposition)方法,它是源物质被热蒸发,或受到粒子轰击时其表面原子产生溅射,实现物质原子从源物质到薄膜的可控转移过程。最后一种为化学方法。

12.3.1 蒸发法

蒸发法就是对蒸镀物质进行加热、升温至蒸发状态后渡越到衬底上,进而沉积出各种薄膜的技术。蒸发法沉积薄膜的装置示意图如图 12.5 所示。

蒸发舟内装有蒸镀材料,衬底则固定在样品台上。真空泵工作使系统内部保持在高真空状态。蒸镀物质被加热到一定温度后开始蒸发。在薄膜制备技术中,真空环境可划分为:低真空($>10^2\text{Pa}$)、中真空($10^2\sim 10^{-1}\text{Pa}$)、高真空($10^{-1}\sim 10^{-5}\text{Pa}$)和超高真空($<10^{-5}\text{Pa}$)。一般先用旋片式机械真空泵抽至 10^{-2}Pa ,再用涡轮分子泵抽至约 $10^{-5}\sim 10^{-8}\text{Pa}$ 。由于在高真空状态,蒸发出的物质原子或分子有着较长的平均自由程,可以渡越并沉积在衬底表面上。

蒸发装置中最重要的部分是物质的蒸发源。蒸发舟加热的方式有多种,普遍采用电阻加热式,还可以采用偏压电场加速电子束后轰击蒸镀物质表面产生高温的加热方式,把一些熔点高的金属做成电极并利用电弧放电的加热方式,以及将激光束照射到蒸发物质表面产生高温的加热方式等。

蒸发法的优点是沉积速度快、薄膜纯度好。缺点是沉积层与衬底的附着力较小,特别是沉积多元合金薄膜时由于不同物质的蒸发率不同等,导致沉积后的薄膜与设计的成分有所偏差。一般通过提高蒸发物质的纯度,降低加热装置、蒸发舟等产生的污染,来保障薄膜的纯度和质量。

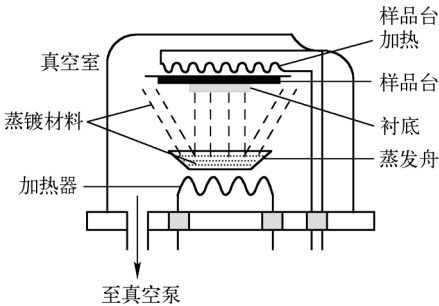


图 12.5 蒸发法沉积薄膜装置示意图

12.3.2 直流磁控溅射法

直流磁控溅射(DC Magnetron Sputtering)装置示意图如图 12.6 所示。抽完真空后送入工作气体——氩气。在溅射靶和阳极之间加上电压,则在两极间的气体原子被大量电离,氩原子被电离为 Ar^+ 和可以独立运动的电子。电子飞向阳极,而氩离子在电场作用下高速飞向阳极/溅射靶,具有高能量的氩离子与溅射靶撞击过程中释放能量,结果导致靶材上的表面原子获得能量,脱离溅射靶的束缚飞向衬底,积累成膜。

氩气压力是很重要的指标。气压低时,电子的自由程长,直接到阳极消失的几率较大,而通过碰撞引起气体分子电离的几率小,溅射效率低;当气压过高时,从溅射靶出来的原子飞往衬底过程中要经过太多的散射,沉积效率也不高。

直流磁控溅射的优点是设备较为简单,溅射速率快,薄膜与衬底间的附着力较大。缺点是不能独立地控制各个工艺参数,而且要求溅射靶是导体材料。

值得注意的是,有时溅射靶表面可能被氧化,产生一绝缘层(例如制备 $\text{Er:Al}_2\text{O}_3$ 薄膜,溅射靶为嵌入钇的铝板,通入氧气后,溅射铝靶表面则氧化一层绝缘的 Al_2O_3 薄膜),这将导致靶“中毒”,在绝缘层上聚集大量带电粒子,产生辉光放电,既影响了薄膜质量,也使系统工

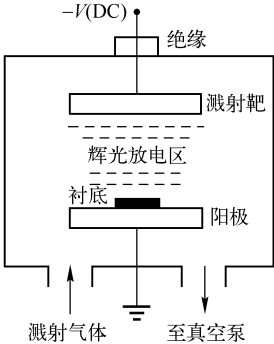


图 12.6 直流磁控溅射装置示意图

作不稳定。

12.3.3 中频、射频磁控溅射法

图 12.7 是中频磁控溅射系统(MFMSS: Medium Frequency magnetron Sputtering System)的示意图,并排配置两个尺寸与外形完全相同的靶,在溅射室中悬浮(电位状态)安装,溅射电压的频率范围为 $10\sim 80\text{kHz}$ 。溅射过程中的每个靶在一个溅射周期内先后承担阴/阳、阳/阴极的作用。具体来说,当一个靶上所加的电压处于负半周时,靶面被正离子轰击溅射;而在正半周时,等离子体中的电子被加速到达靶面,中和了靶面上绝缘层上累积的正电荷,从而抑制了打火现象。同时,由于消除了普通直流反应磁控溅射中的“阳极消失”现象,使溅射过程得以稳定地进行。此外,中频磁控溅射法制备薄膜还具有缺陷密度小、致密和附着力强等优点。

利用此系统的双溅射靶优势,可以制备均匀和非均匀掺杂的薄膜。例如铈铟共掺 Al_2O_3 薄膜制备中,溅射靶备有镶嵌了铈和铟金属柱的纯铝圆盘(见图 12.8),以及没有任何镶嵌的纯铝圆盘。

沉积均匀掺杂 $\text{Yb}^{3+}:\text{Er}^{3+}:\text{Al}_2\text{O}_3$ 薄膜时,两个溅射靶的铈柱、铟柱数目和分布一致,做成名符其实的“孪生靶”。而且,单晶硅基底在电机驱动下不停旋转,保证掺杂离子在薄膜内部分布的均匀性。

沉积非均匀掺杂 $\text{Yb}^{3+}:\text{Er}^{3+}:\text{Al}_2\text{O}_3$ 薄膜时,每个溅射靶上铈柱、铟柱的布局保持较好的对称性,但两个靶的铈柱、铟柱数目和分布则完全不同,是“非对称靶对”。同时,旋转单晶硅基质的电机停止工作,确保掺杂离子在薄膜内部分布的非均匀性。典型的,一个溅射靶上镶嵌了一定数目铈柱和铟柱,另一个溅射靶则为纯铝靶,借助于每个靶的各半个周期的交替溅射,得到图 12.9 所示微观结构的理想的非均匀 $\text{Yb}^{3+}:\text{Er}^{3+}:\text{Al}_2\text{O}_3$ 薄膜。

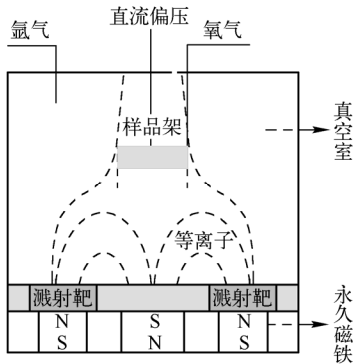


图 12.7 中频磁控溅射系统示意图

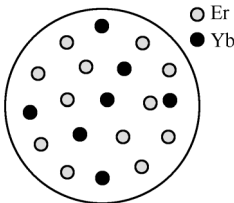


图 12.8 合靶示意图

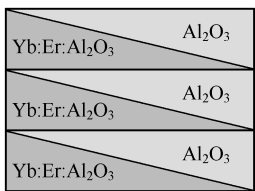


图 12.9 非均匀掺杂铈铟共掺 Al_2O_3 薄膜示意图

溅射装置如果采用射频电源,如 13.65MHz ,则称为射频磁控溅射(RF Magnetron Sputtering),也是广泛采用的一种薄膜沉积方法。同样不易造成放电、靶材中毒等现象,沉积的膜层致密,附着力好。尤其对于绝缘靶材或导电性很差的非金属靶材,如陶瓷、玻璃等,一般都用射频溅射法。

12.3.4 脉冲激光沉积法

脉冲激光沉积(PLD: Pulsed laser deposition)是将脉冲激光器产生的高功率脉冲激光束聚焦作用于靶体材料表面,使靶体材料表面产生高温及熔蚀,并进一步产生高温高压等离子体

($T > 10^4 \text{K}$)，这种等离子体定向局域膨胀发射并在衬底上沉积而形成薄膜。

图 12.10 是脉冲激光溅射沉积薄膜系统示意图，激光器一般为准分子激光器，如 KrF (248nm)、ArF (193nm)。激光被聚焦后穿过石英玻璃进入真空室并入射到靶面上。激光产生一个足够强的电场，将处于光吸收深度范围内的电子通过一些非线性过程从原子中移出。这些电子在激光光束产生的电磁场中振荡的同时还与邻近的原子或离子相互碰撞，从而将一部分能量转移到靶表面的晶格中。当激光脉冲停止后，由于库仑排斥和靶表面的反冲作用，由高能离子、电子、原子、分子等组成的等离子体从融蒸的靶材附近快速绝热地膨胀和传播，并与背景气体发生复杂的气相反应。这些高能粒子在到达衬底表面后以一定的几率吸附在其上，继而成核、长大，形成连续的薄膜。

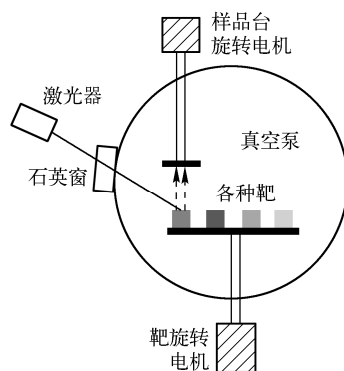


图 12.10 脉冲激光溅射沉积薄膜系统示意图

和其他制膜技术相比，PLD 法主要有下述优点：适用于多组元化合物的沉积，激光的非选择一致蒸发有利于沉积此类薄膜；可以蒸发金属、半导体、陶瓷等无机材料，有利于解决难熔材料的薄膜沉积问题；能够可控沉积高质量纳米薄膜，高的离子动能具有显著增强二维生长和显著抑制三维生长的作用，促进薄膜的生长沿二维展开，因而能获得连续的极细薄膜而不形成分离核岛；沉积温度低，可以在室温下原位生长取向一致的织构膜和外延单晶膜；换靶装置便于实现多层膜及超晶格的生长，多层膜的原位沉积便于产生原子级清洁的界面。

脉冲激光沉积也存在以下有待解决的问题：对相当多的材料，沉积的薄膜中有熔融小颗粒或靶材碎片，这是在激光烧蚀过程中喷溅出来的，这些颗粒的存在大大降低了薄膜的质量。

12.3.5 薄膜制备的化学方法

化学气相沉积(CVD: Chemical vapor deposition)是与物理气相沉积(PVD)既有联系又有区别的一种沉积技术，利用气态的前驱反应物质在气态条件下通过原子分子间的化学反应生成固态物质沉积在基体表面，进而制得固体材料的工艺技术。化学气相沉积法已经广泛用于研制新晶体，制备各种单晶、多晶或玻璃态等无机薄膜材料。这些材料可以是氧化物、硫化物、氮化物、碳化物，也可以是 III-V、II-IV、IV-VI 族中的二元或多元系化合物，它们的物理性能可以通过气相沉积过程中工艺参数精确控制。

图 12.11 是化学气相沉积装置示意图，包括反应室、加热部分、反应气体和运输气体的供给及计量系统，以及气体排出系统等基本组成部分。

开放式系统一般由反应器、气体净化系统、气体计量控制系统、排气系统及尾气处理等部分组成。其优点是能连续地供气和排气，整个沉积过程中气相副产物不断被排出，工艺易于控制，有利于沉积薄膜的形成，而且成膜厚度均匀，重现性好，工件容易取放，同一装置可反复使用。

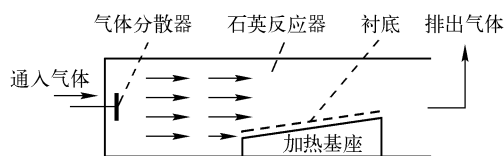


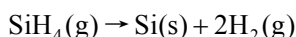
图 12.11 卧式开管 CVD 装置示意图

封闭式系统使源物质端处于高温区，生长端位于低温区，在精确控制的温度范围内进行化学输运反应沉积。封闭式系统的优点是反应物与生成物不会被污染，不必连续抽气就可以保持反应器内的真空，对于必须在真空条件进行的沉积十分方便。但其缺点是沉积速率慢，不适于批量生产，且反应管只能使用一次，生产成本低。

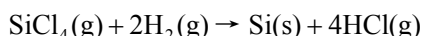
化学气相沉积技术可按照沉积温度、反应器内的压力、反应器壁的温度和沉积反应的激活方式进行分类。例如,按沉积温度分为低温(200~500℃)CVD、中温(500~1000℃)CVD 和高温(1000~1300℃)CVD;按反应器内的压力可分为常压式和低压式;按反应器壁的温度可分为热壁式和冷壁式;按反应激活方式可分为热激活 CVD 和等离子体激活 CVD 等。

化学反应过程中所涉及的化学反应类型不同,主要的生长方法有:

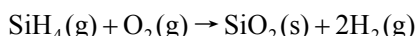
(1) 热解反应法。利用高温使得某些氢化物、羟基化合物、金属有机化合物等反应物在一定温度下发生热解进而生成薄膜材料。如利用 SiH_4 在 500℃ 以上热解成 H_2 和 Si , 方程式为



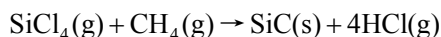
(2) 还原反应。某些羟基化合物和卤化物等具有良好的热稳定性,利用还原剂将其置换出来形成沉积物。如利用 H_2 还原 SiCl_4 形成 Si 材料,方程式是



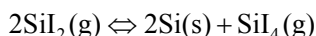
(3) 氧化反应。利用 O_2 等作为氧化剂将某些前体物质氧化,如



(4) 化合反应。若反应目标产物的前体可以以气态形式存在并且具有一定的反应活性,就可以在特定条件下使前体物之间发生化合反应生成沉积物



(5) 气相输运法。这种反应在高温区被置换的物质构成卤化物或者与卤素反应生成低价卤化物。它们被输送到低温区域,在低温区域由非平衡反应在基片上形成薄膜。方程式为



除了以上列出的反应方式外,还有歧化反应、可逆反应等反应方式。

12.3.6 薄膜的退火

薄膜样品制备之后,都需进行必要的退火处理。退火可以使材料更均匀致密,减少光学损耗;对离子注入法制备的薄膜,更是可以消除注入损伤。对于有源薄膜,如采用射频辅助微波等离子体磁控溅射沉积 $\text{Er}:\text{Al}_2\text{O}_3$ 薄膜后进行高温退火,使氧原子更好地聚集到铒离子周围形成 $\text{Er}-\text{O}$ 复合体发光中心,同时还消除了 Al_2O_3 晶格结构中的缺陷,提高晶格的完整性,从而消除非辐射发光中心,增加了 Er^{3+} 亚稳态能级寿命。退火对 Al_2O_3 晶相(γ 、 θ 、 α 相等)的形成和铒离子在 Al_2O_3 中发光中心的分布也将产生影响,改变了薄膜的光致发光特性。所以退火对掺 Er 薄膜材料的发光性能是至关重要的。

退火方法虽然有很多,但多采用热退火方式,即将样品放在高温炉中,按一定比率升温到 800~1100℃,保持 1~2 小时,然后自然冷却到室温。热退火方法操作简单,但升温较慢。在此,介绍一种激光快速退火技术。

激光退火实验装置如图 12.12 所示。选用 CO_2 激光器作为热源,输出光束的时间、形式(连续/脉冲)及脉冲频率、占空比等参量均可由电源控制器进行调节。 $\text{He}-\text{Ne}$ 激光器用于辅助不可见 CO_2 激光器中红外(10.6 μm 波长)输出光束在薄膜样品上的空间定位。用衰减透镜对激光束扩束,使光束更大面积地、均匀地照射到样品表面。

图 12.13 是铈铒共掺 Al_2O_3 薄膜分别经激光退火和热退火(950℃、2 小时)后的光致发光光谱。样品都是由射频辅助微波等离子体磁控溅射工艺同时沉积制备的,但两条谱线经比较显示,激光退火谱线 a 的峰值波长(1534.48nm)较热退火谱线 b 的峰值波长(1542.69nm)向短波方

向移动 8.21nm, 表明不同的退火方式对晶体微观结构有一定的影响, 导致晶体场对稀土离子的能级有小幅度的扰动; 更重要的是前者的峰值强度不仅是后者峰值强度的 15.8 倍, 而且半峰值宽度(62.87nm)也明显加宽, 是后者的 2.47 倍。谱线 c 是未经退火的镱铒共掺 Al_2O_3 薄膜光致发光光谱, 基本没有 1530nm 波段的发射峰。

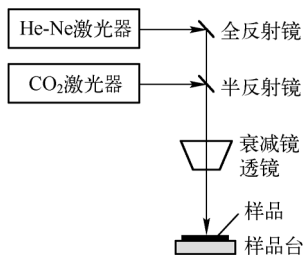


图 12.12 薄膜激光退火装置

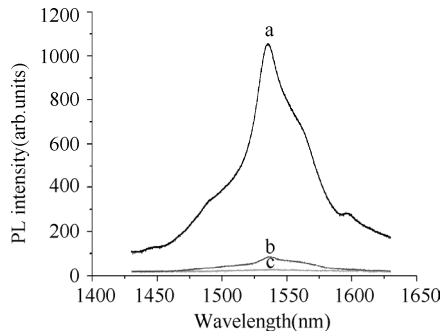


图 12.13 经激光退火、热退火后 Er^{3+} 的光致发光光谱

12.4 薄膜的表征

12.4.1 X 射线衍射仪

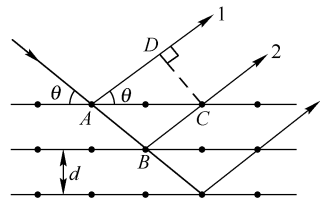
1895 年, 德国物理学家 Roentgen 发现 X 射线。1912 年, Laue 等人通过实验证明了 X 射线与晶体相遇时能发生衍射现象, 证明 X 射线具有电磁波的性质。Bragg 父子发展并完善了 X 射线衍射(XRD: X-Ray Diffraction)理论。1945 年, 飞利浦公司研制出 X 射线衍射仪。

X 射线衍射仪是采用衍射光子探测器和测角仪来记录衍射线位置及强度的分析仪器。如图 12.14 所示, 当一束单色 X 射线入射到晶体时, 由于晶体是由原子规则排列成的晶格点阵, 原子间距与入射 X 射线波长有相同的数量级。因此不同原子散射的 X 射线相互干涉, 在某些特殊方向上产生强 X 射线衍射。

X 射线衍射线空间方位与晶体结构的关系可用 Bragg 方程表示:

$$2d \sin \theta = n\lambda$$

(12.4-1) 图 12.14 X 射线在晶体表面上的衍射



其中 d 为晶面间距, n 为衍射级次, θ 为掠射角, λ 为 X 射线的波长。当晶面与 X 射线之间满足该方程时, X 射线的衍射强度将增强, 故利用入射和衍射 X 射线的角度及强度的分布, 可以了解晶体的点阵类型、晶格常数、晶体取向、缺陷和应力等有关薄膜材料的结构信息, 并可进行定性和定量的物相分析。

X 射线衍射仪包括 X 射线发生器、衍射测角仪、测量电路、自动测量与数据处理系统等部分, 如图 12.15 所示。实验室一般有 W、Mo、Cu、Co、Fe、Cr 六种靶材。不同的样品组分需选择合适的靶材, 避免产生 X 射线荧光。若想提高分辨率, 可考虑选择产生 X 射线波长较长的靶材。

图 12.16 为采用磁控溅射工艺制备的不同掺铒浓度(0.5、1、2mol%)的 $\text{Er}^{3+}:\text{Al}_2\text{O}_3$ 薄膜的 XRD 谱图。样品的退火温度均为 950°C 。可以看出, 三个样品的谱形相似, 结晶程度不十分理想, 主要是 $\gamma\text{-Al}_2\text{O}_3$ 和 $\theta\text{-Al}_2\text{O}_3$ 两相混合。随着掺铒浓度的提高, 各衍射峰强度均有所下降。

测量结果表明, 由于掺铒浓度较低, 所以它的掺入并没有改变 Al_2O_3 的晶体结构。

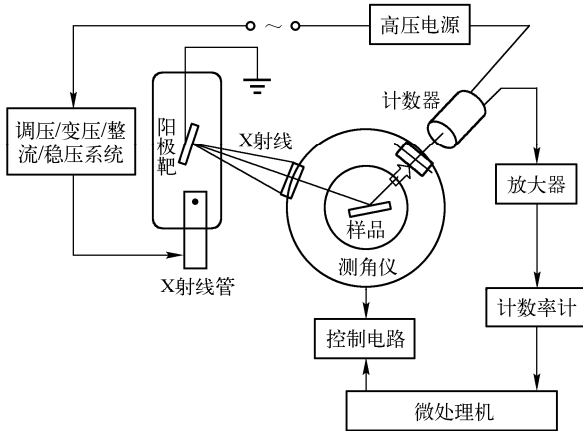


图 12.15 X 射线衍射仪基本结构框图

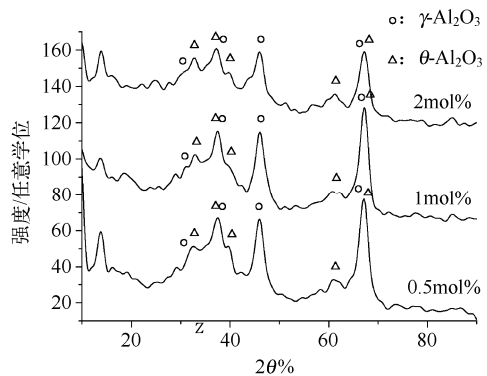


图 12.16 $\text{Er}^{3+}:\text{Al}_2\text{O}_3$ 薄膜的 XRD 谱图

12.4.2 扫描电镜

扫描电镜 (SEM: Scanning Electron Microscopy) 是用极细的电子束在样品表面扫描, 将产生的二次电子用特制的探测器收集, 形成电信号运送到显像管, 在荧光屏上显示物体, 并且可以摄制成照片。SEM 具有放大倍数可调范围宽、图像的分辨率高、景深大等特点, 被广泛地应用于生物学、医学、材料等领域。

扫描电镜主要由电子枪、聚光镜、物镜、扫描系统以及电子信号的收集与处理系统等部分组成, 如图 12.17 所示。电子枪产生很细的电子束(能量为 $5\sim 35\text{keV}$, 直径约几个 nm), 经栅极聚焦后, 在加速电压作用下, 经 $2\sim 3$ 个电磁聚焦透镜组成的电子光学系统聚焦, 并且使该电子束在样品表面扫描, 同时激发出各种信号。由于高能电子束与样品物质的交互作用, 产生各种信息, 其中包括二次电子、背散射电子、X 射线、吸收电子、俄歇 (Auger) 电子等。在上述信号中, 最主要的是二次电子, 它是被入射电子所激发出来的样品原子中的外层电子, 产生于样品表面以下几 nm 至几十 nm 的区域, 其产生率主要取决于样品的形貌和成分。通常所说的扫描电镜像指的就是二次电子像, 它是研究样品表面形貌的最有用的电子信号。二次电子检测器的探头是一个闪烁体, 当电子打到闪烁体上时, 就在其中产生光, 这种光被光导管传送到光电倍增管, 光信号即被转变成电流信号, 再经前置放大及视频放大, 电流信号转变成电压信号, 最后被送到显像管的栅极。调制与入射电子束同步扫描的显像管亮度, 得到反映样品表面形貌的二次电子像。

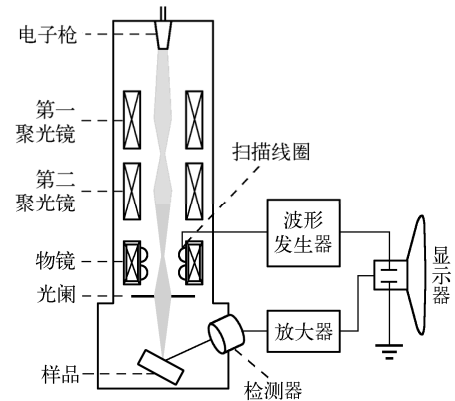


图 12.17 扫描电子显微镜基本结构框图

图 12.18 为采用中频磁控溅射法在不同工艺参数时制备的铈铒共掺 Al_2O_3 薄膜表面形貌扫描电镜图像, 放大倍率均为 1000 倍。当工艺参数选择不合适时, 铈和铒被析晶出颗粒状 (见图 12.18(a)); 调整工艺参数, 表面形貌得到很好的改善 (见图 12.18(b)); 优化工艺参数后, 得到的铈铒共掺 Al_2O_3 薄膜表面形貌均匀、平整和致密 (见图 12.18(c))。

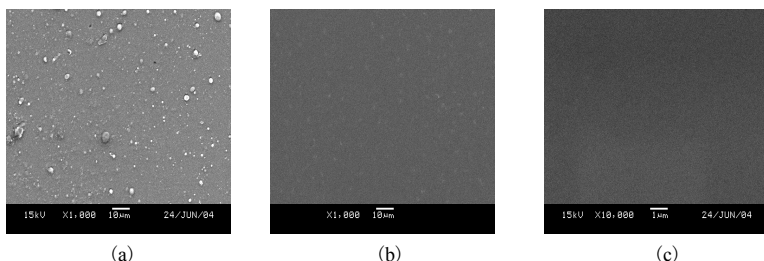


图 12.18 中频磁控溅射法制备的 Yb:Er:Al₂O₃ 薄膜 SEM 图

12.4.3 电子探针

电子探针仪 (EPM: Electric Probe Microanalyzer) 是一种微区成分分析仪器, 全称电子探针 X 射线显微分析仪。它用一束聚焦的很细的加速到 5~30kV 的电子, 轰击样品上的某个“点”, 采集样品被轰击时发射的特征 X 射线信息, 确定分析区域的化学组成。

图 12.19 为电子探针的结构示意图, 有电子光学系统 (包括产生高速电子的电子枪和将高速电子加以聚焦使之在样品表面形成一个很小焦斑的透镜系统)、样品室、光学及电子光学样品观察装置、谱仪、接收记录系统和为保证仪器正常工作的辅助系统组成。电子探针通过检查谱线波长和强度, 进行定点元素全分析、某特征 X 射线强度沿样品扫描线的分布和根据图像上亮点疏密程度, 确定某元素在样品表面上的分布情况。它的优点是分析区小, 准确度和灵敏度高, 可逐个测定单个小颗粒的成分。但由于低原子序数的原子荧光产额小, 产生的 X 光的波长长, 在传播过程中吸收严重, 不宜进行大面积内的平均成分分析。

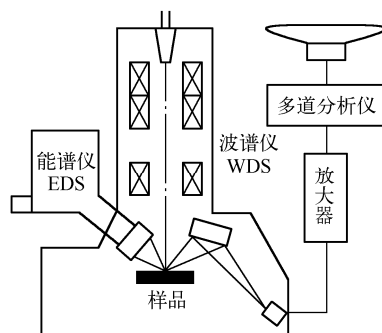


图 12.19 电子探针仪结构示意图

薄膜成分含量是影响薄膜发光性能和光波导光学性能的重要参数, 另一方面, 样品的表面形貌不好会增加光损耗、降低增益, 电子探针可以验证所设计的含量与实际含量的差距。图 12.20 是对镱铒共掺 Al₂O₃ 薄膜 Yb/Er 实验设计比例与实际比例的关系曲线, 从图上可以清楚地看出 Yb/Er 设计比例偏离实际比例很小。图 12.21 为 Yb:Er:Al₂O₃ 薄膜的电子探针成分像, 成分像显示的是被检测材料中各成分的均匀度, 如果不均匀将会在成分像中显示亮点或者暗点。从图中可以看出, 所制备薄膜即使在高倍放大下也表现出了很好的均匀度, 满足制备光波导的要求。

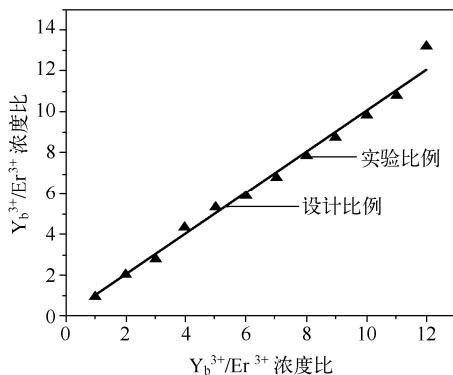


图 12.20 实验和设计的镱、铒浓度比例

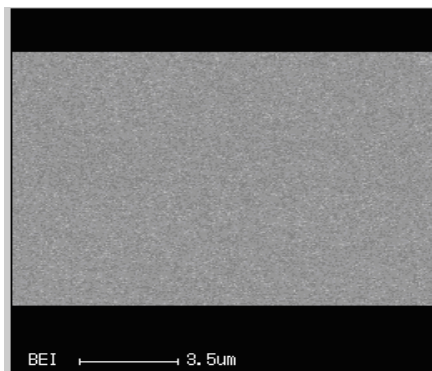


图 12.21 电子探针的成分像

12.5 三维光波导的制作

获得致密、均匀和光滑的薄膜只是完成了二维波导的制备,要获得在实际光路中具有特定功能的三维波导,还需按设计的拓扑结构对薄膜进行精细的刻蚀加工。除了激光束或电子束直接写入法之外,三维波导的制作工艺大致上可分为波导图形的形成技术,以及为了实现三维化而进行的加工两个步骤。波导的图形与尺寸是由器件所需要达到的设计尺寸决定的,即使在可见光范围内,多数情况下的波导宽度也都在 $3\mu\text{m}$ 以上,因此图形形成时通常都可以采用光刻技术。

波导的刻蚀加工工艺较多,选择时应考虑:(1)刻蚀速度及其可控制性;(2)具有良好的各向异性,即仅在垂直方向刻蚀,避免横向刻蚀;(3)具有理想的选择性,即只对预刻蚀的功能层反应,而对掩模和其他层的刻蚀速率要小得多。刻蚀有湿法刻蚀和干法刻蚀两类。

图 12.22 显示了一个制作三维波导的工艺流程。

12.5.1 光刻技术

下面简单地介绍光刻技术 (photolithography) 的工艺流程,以此说明波导表面抗腐蚀图形的形成过程。

(1) 抗蚀剂涂布。根据光致抗蚀剂(光胶)被曝光部分发生光化学反应种类的不同,可以将光致抗蚀剂大致分为正性光致抗蚀剂和负性光致抗蚀剂两种。被曝光部分发生交联反应的抗蚀剂经过显影后该曝光部分被保留下来,未曝光部分则被除掉,这种光致抗蚀剂称为正性光致抗蚀剂;而被曝光部分发生分解反应的抗蚀剂,经显影后,曝光部分被除掉,未曝光部分则被保留下来,这种光致抗蚀剂称为负性光致抗蚀剂。衡量抗蚀剂优劣的标准包括对光源的灵敏度、对图形的分辨率、对基片的附着性、在基片上涂布的均匀性,以及对刻蚀工艺的耐腐蚀性等。

使用离心甩胶机将光致抗蚀剂涂布在波导衬底或者薄膜波导上,根据抗蚀剂的黏度和甩胶机旋转速度来控制膜层厚度,并保证膜层均匀无针孔,然后迅速放入适当条件的烘箱中进行烘烤,以挥发掉抗蚀剂中的溶剂,并提高膜层的附着力。温度一般在 100°C 左右,时间与厚度有关,一般十几分钟至几十分钟。

(2) 曝光。曝光方式有接触式和非接触式。接触式曝光是将经过设计制作好的掩模紧贴在抗蚀剂表面,用紫外线曝光。这种曝光方式衍射效应小、分辨率高、精度好,但容易损伤和污染掩模板和抗蚀剂涂层。非接触式曝光是采用光学投影方式,将掩模板上的图形聚焦于抗蚀剂涂层上进行曝光,掩模尺寸可以比实际尺寸大,但设备复杂,技术难度大。曝光也可以不用掩模,借助图形数据采用激光束或者电子束直接对涂布的光致抗蚀剂进行曝光,即所谓的无掩模法,是自由度很高的方法。

(3) 显影。曝光后将带有光致抗蚀剂的衬底浸入显影液中进行显影或者用喷雾法对光致抗蚀剂显影。显影后为使它在后续的腐蚀工序中保持完好,还要进行烘烤以增加抗蚀剂膜的黏附力和耐腐蚀性。

一般的三维波导制作过程和技术如图 12.23 所示。

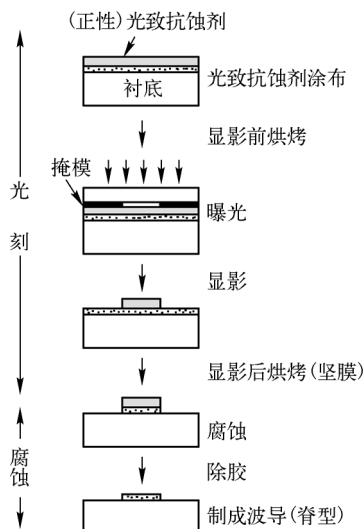


图 12.22 光刻与腐蚀工艺示例

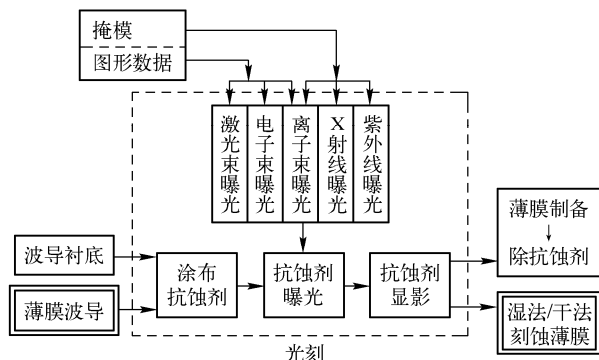


图 12.23 三维波导制作过程和技术

12.5.2 加工技术

1. 脱模法

在制作金属薄膜电极以及制作比较厚的薄膜波导层和形成光栅图形时，多采用图 12.24 所示的脱模法。这种方法的第一步是在波导衬底上涂布光致抗蚀剂并形成图形，由于显影过程中的侧蚀现象，形成具有凸檐的抗蚀剂截面形状。抗蚀剂的厚度必须大于需要加工的薄膜厚度。第二步是用蒸发法或溅射法等制膜方法在整个衬底表面沉积薄膜。最后用有机溶剂(如丙酮)溶解并除去抗蚀剂。这种方法要注意凸檐对沉积薄膜的影响，并设法使显影彻底，不残留抗蚀剂，以增加薄膜的附着力。

脱模法不需要特殊设备，只要抗蚀剂膜层厚度选择适当，就能够制作出亚微米尺度的精细图形，是集成光路制作中使用较多的重要加工技术。

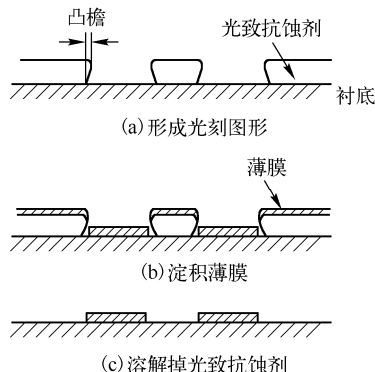


图 12.24 脱模法制备波导

2. 刻蚀法

这里所说的刻蚀法是指在衬底上已经生成波导膜层，在波导膜层上进一步刻蚀加工所需图形的方法。

(1) 湿法刻蚀

湿法刻蚀也称化学刻蚀，即将基板和已敷掩模的样品放入化学溶液中进行化学腐蚀，使裸露且没有抗蚀剂掩盖的薄膜部分与化学试剂发生反应而被除掉，例如，用一定浓度(如 49%)的氟酸(HF)刻蚀 SiO_2 ，用磷酸刻蚀铝薄膜等。

湿法刻蚀的优点是操作简单，适合大批量生产，选择性较好；缺点是化学反应是各向同性的，容易产生侧蚀，使加工精度变差，如图 12.25 (a) 和 (b) 所示。

图 12.25 (b) 中，实线为设计的 $\text{Yb:Er:Al}_2\text{O}_3$ 光波导脊形结构，虚线则是湿法刻蚀过程中产生了侧蚀，图 12.25 (c) 是两种截面下 $1.53\mu\text{m}$ 的 E_{11}^x 模的场分布。可以看出，侧蚀后， $\text{Yb:Er:Al}_2\text{O}_3$ 功能薄膜层电磁场能量密度下降，影响光波导放大器的增益。

(2) 干法刻蚀

1) 等离子体刻蚀

等离子体刻蚀(PE: Plasma Etching)是利用 $10\sim 100\text{Pa}$ 的特定气体的辉光放电，气体被电离，形成离子、电子、激发态原子、原子游离基等化学性质活泼的激发活性中心，与薄膜发

生离子化学反应，生成的气体则被低气压的真空室抽走。利用这个特性的刻蚀技术，因为主体是等离子体，所以命名为等离子体刻蚀。它与湿法刻蚀相比最大的优点是可使刻蚀具有强方向性。

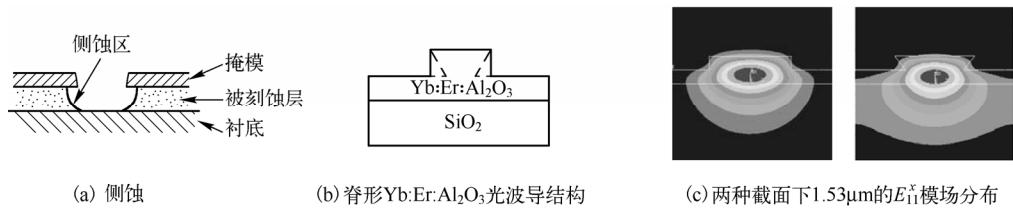


图 12.25 刻蚀后的截面形状及对场分布的影响

例如， CF_4 产生的等离子体中存在很多的分解生成物，其中 F^* (氟游离基，游离状态的氟) 化学活性很强，很容易与等离子体中的物质如 Si 、 SiO_2 、 Si_3N_4 等发生化学反应而达到刻蚀的目的。若利用氧离子体，还能够灰化光刻胶等有机物，它经常被用于去除光刻胶。由于各向同性刻蚀，即使复杂形状的光刻胶也可被完全去除。

虽然等离子体刻蚀的机理尚未完全弄清楚，但由于是干法，所以没有公害，便于自动化，降低成本，可广泛应用于大面积半导体元件、平板显示面板等各种电子元器件的刻蚀工艺中。但刻蚀精度不高，一般仅用于 $4\sim 5\mu\text{m}$ 以上线条的刻蚀。

图 12.26 是等离子体刻蚀直线通道的 $\text{Yb:Er:Al}_2\text{O}_3$ 光波导照片，其中，图 (b) 是宽约 $4\mu\text{m}$ 的一个波导通道，刻蚀质量较好，但有倒角，且侧面刻蚀的不干净。当宽度减为 $2\mu\text{m}$ 以内时，通道宽度不统一，更严重的是，通道出现断裂，如图 (c) 所示。

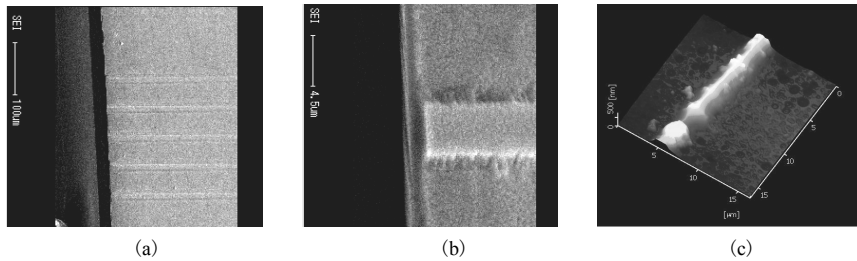


图 12.26 等离子体刻蚀的光波导

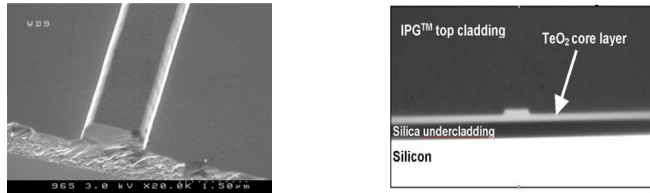
2) 反应离子刻蚀

反应离子刻蚀 (RIE: Reactive Ion Etching) 是在低于 10Pa 气压下，利用高频电场下气体辉光放电产生高能离子，离子轰击样品表面时的溅射效应和活性粒子的化学效应相结合实现增强刻蚀的一种技术。它具有较高的刻蚀速率，良好的方向性和选择性，能刻蚀精细结构的图形，波导侧壁的垂直性好。选择注入合适的刻蚀气体，反应生成易挥发性物质，可以对不同材料的样品实施刻蚀。一般地，对 III-V 族化合物半导体材料和 Al 等 III 族元素材料，反应气体以 Cl_2 为主，对 Si 及其化合物，以氟化物气体为主。图 12.27 和图 12.28 是 RIE 刻蚀的一些波导示意图，制作质量很好，侧壁光滑，损耗低。

3) 聚焦离子束刻蚀

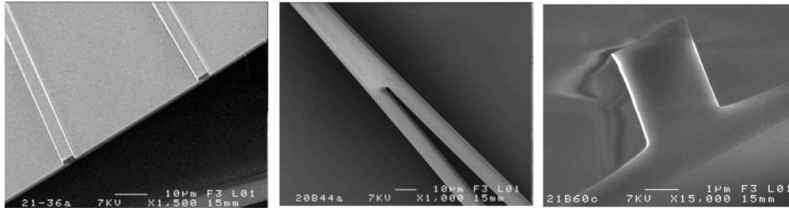
聚焦离子束刻蚀 (FIB: Focused Ion Beam) 可以对材料进行纳米级微细加工。高能量 (如 50keV) 的聚焦离子束斑点直径在 100nm 以下，最小可达 10nm 。用此方法已获得最小线宽十几纳米的加工结果。图 12.29 和图 12.30 示出了两个 FIB 刻蚀的例子。FIB 具有刻蚀速率高、束流稳定、分辨率高、纳米操控精确的优点，还可以实现在计算机控制下的无掩模注入，甚至

无显影刻蚀，可直接制备各种纳米结构器件。缺点是在离子束加工过程中，存在损伤问题。



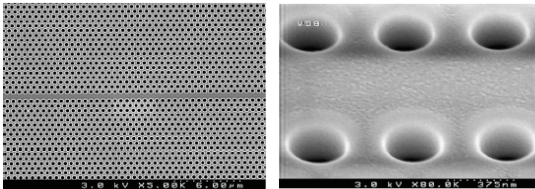
膜厚 $1.6\mu\text{m}$ ，脊高 $0.8\mu\text{m}$ ，对 1550nm 光波损耗约 0.1dB/cm

图 12.27 RIE 刻蚀的 $\text{TeO}_2/\text{SiO}_2/\text{Si}$ 脊波导



膜厚 500nm ，宽 $4\mu\text{m}/2\mu\text{m}$

图 12.28 RIE 刻蚀的 Y 分支 $\text{GeSbS}/\text{SiO}_2$ 波导



晶格常数 550nm ，孔径 330nm

图 12.29 FIB 刻蚀的硫族材料 GeAsSe 光子晶体波导

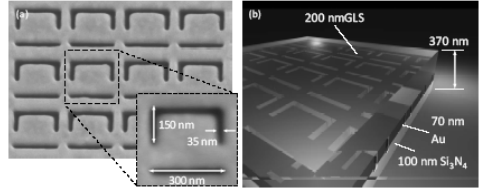


图 12.30 FIB 刻蚀的超材料结构

离子刻蚀还有很多种，如离子束刻蚀 (IBE)、感应耦合等离子体刻蚀 (ICP)、高密度等离子体刻蚀 (HDP)、化学辅助离子束刻蚀 (CAIBE) 等，此外还有激光束激励刻蚀等，不再一一介绍。

习题

- 12-1 简述光纤制备工艺的步骤及方法。
- 12-2 制备薄膜的工艺和技术有哪些？制备薄膜特别是有源薄膜，为何通常要做退火处理？
- 12-3 简述光刻技术的工艺过程。
- 12-4 什么是脱模法？
- 12-5 什么是 RIE、FIB 刻蚀？刻蚀工艺有什么特点？
- 12-6 简要分析波导刻蚀工艺的方法，并讨论选择时应考虑哪些因素？

附录 A Bessel 方程与 Bessel 函数

A.1 Bessel 方程与 Bessel 函数

Bessel 方程是形如 $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \nu^2)y = 0$ 的二阶常微分方程。方程的特解是第一类 Bessel 函数 $J_\nu(x)$ 。 $J_\nu(x)$ 的幂级数展开式为

$$J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n + \nu} \quad (\text{A-1})$$

ν 不为整数时, J_ν 与 $J_{-\nu}$ 线性无关, 通解为 $y = C_1 J_\nu + C_2 J_{-\nu}$ 。 ν 为整数 m 时, $J_{-m} = (-1)^m J_m$, J_m 与 J_{-m} 线性相关。第一类 Bessel 函数曲线见图 A.1。

第二类 Bessel 函数 $Y_\nu(x)$ 定义为

$$Y_\nu(x) = \frac{\cos(\nu\pi)J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)} \quad (\text{A-2})$$

该函数又称为诺伊曼 (Neumann) 函数, 也常记作 $N_\nu(x)$, 是 Bessel 方程的另一类解。 ν 为整数 m 时, 同样有 $Y_{-m} = (-1)^m Y_m$ 。 J_ν 和 $Y_\nu(x)$ 随变量 x 呈振荡型变化, 但 $Y_\nu(x)$ 在 $x=0$ 点趋于负无穷。其函数曲线见图 A.2。

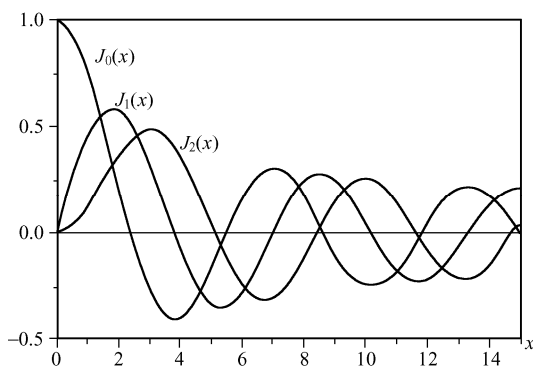


图 A.1 第一类 Bessel 函数曲线

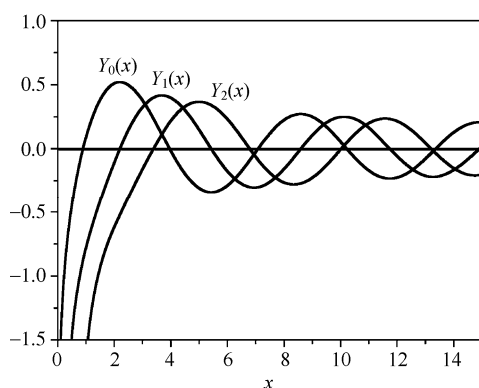


图 A.2 第二类 Bessel 函数曲线

此外还有第三类贝塞尔函数 $H_\nu^{(1)}(x)$ 和 $H_\nu^{(2)}(x)$, 也是方程的线性无关解, 有

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iY_\nu(x) \quad (\text{A-3})$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iY_\nu(x) \quad (\text{A-4})$$

这类函数又分别称为第一类和第二类汉克尔 (Hankel) 函数。

当变量 x 为复数时, Bessel 函数同样成立, 并且当 x 为纯虚数时, 则有第一类变形 Bessel 函数 $I_\nu(x)$ 和第二类变形 Bessel 函数 $K_\nu(x)$, 也称虚变量 Bessel 函数, 即

$$I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix) \quad (\text{A-5})$$

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin(\nu\pi)} \quad (\text{A-6})$$

以上形式保证了当变量 x 为实数时，函数值亦为实数。若将 Bessel 方程中的 x 换为 ix ，则方程化为形如 $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - (x^2 + \nu^2)y = 0$ 的变形 Bessel 方程。 $I_\nu(x)$ 和 $K_\nu(x)$ 这两个变形 Bessel 函数构成了该变形贝塞尔方程的一个相互线性无关的解系。 $I_\nu(x)$ 和 $K_\nu(x)$ 分别呈指数增长和指数衰减型变化， $K_\nu(x)$ 在 $x=0$ 点趋于无穷，函数曲线见图 A.3 和图 A.4。

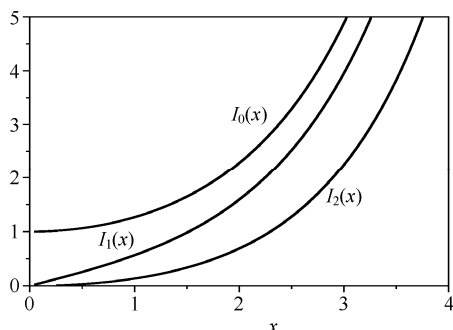


图 A.3 第一类变形 Bessel 函数曲线

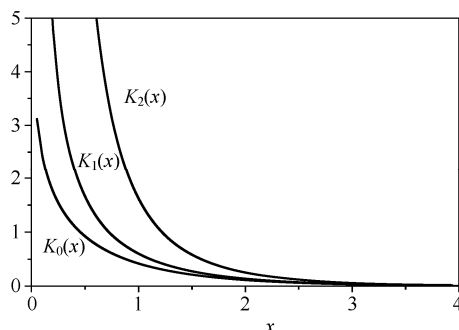


图 A.4 第二类变形 Bessel 函数曲线

A.2 各类 Bessel 函数的渐近展开式

表 A.1 列出的是当 $x \rightarrow 0$ 和 $x \rightarrow \infty$ 时各类 Bessel 函数的最基本的渐近公式。

表 A.1 Bessel 函数的渐近公式

Bessel 函数	$x \rightarrow 0$		$x \rightarrow \infty$
$J_m(x)$	$J_0 \rightarrow 1 - \frac{1}{4}x^2$	$J_m \rightarrow \frac{1}{m!} \left(\frac{x}{2}\right)^m \quad (m \geq 1)$	$J_m \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{m\pi}{2}\right)$
$Y_m(x)$	$Y_0 \rightarrow \frac{2}{\pi} \ln \frac{x}{2}$	$Y_m \rightarrow -\frac{(m-1)!}{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{-m}$	$Y_m \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{m\pi}{2}\right)$
$I_m(x)$	$I_0 \rightarrow 1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2$	$I_m \rightarrow \frac{1}{m!} \left(\frac{x}{2}\right)^m$	$I_m \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^x$
$K_m(x)$	$K_0 \rightarrow -\ln\left(\frac{x}{2}\right)$	$K_m \rightarrow \frac{1}{2}(m-1)! \left(\frac{x}{2}\right)^{-m}$	$K_m \rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left[1 + \frac{4m^2 - 1}{8x}\right]$ $\frac{K_{m+1}}{K_m} = 1 + \frac{1 \pm 2m}{2x}$

A.3 Bessel 函数的递推关系

$$J'_0(x) = -J_1(x)$$

$$\frac{d}{dx} J_m(x) = \frac{m}{x} J_m(x) - J_{m+1}(x)$$

$$\frac{d}{dx} J_m(x) = J_{m-1}(x) - \frac{m}{x} J_m(x)$$

$$\frac{d}{dx} J_m(x) = \frac{1}{2} [J_{m-1}(x) - J_{m+1}(x)]$$

$$\frac{2m}{x}J_m(x) = J_{m-1}(x) + J_{m+1}(x)$$

说明 $m+1$ 阶 Bessel 函数可由 m 阶和 $m-1$ 阶来表示, 故所有整数阶的 Bessel 函数都可用 J_0 和 J_1 来表示。关于 $J_m(x)$ 的所有递推关系都适用于 $Y_m(x)$ 。对于变形 Bessel 函数也有相应的递推关系。

$$K'_0(x) = -K_1(x)$$

$$\frac{d}{dx}K_m(x) = \frac{m}{x}K_m(x) - K_{m+1}(x)$$

$$\frac{d}{dx}K_m(x) = -K_{m-1}(x) - \frac{m}{x}K_m(x)$$

$$\frac{d}{dx}K_m(x) = -\frac{1}{2}[K_{m-1}(x) + K_{m+1}(x)]$$

$$I'_0(x) = I_1(x)$$

$$\frac{d}{dx}I_m(x) = \frac{m}{x}I_m(x) + I_{m+1}(x)$$

$$\frac{d}{dx}I_m(x) = I_{m-1}(x) - \frac{m}{x}I_m(x)$$

附录 B LP_{mn} 模特征方程与其组成的矢量模特征方程的等价性

EH_{mn} 和 HE_{mn} 模的特征方程分别为

$$\frac{J_{m+1}(U)}{UJ_m(U)} + \frac{K_{m+1}(W)}{WK_m(W)} = 0$$

$$\frac{J_{m-1}(U)}{UJ_m(U)} - \frac{K_{m-1}(W)}{WK_m(W)} = 0$$

由此, $EH_{m-1,n}$ 模和 $HE_{m+1,n}$ 模的特征方程分别为

$$\frac{J_m(U)}{UJ_{m-1}(U)} + \frac{K_m(W)}{WK_{m-1}(W)} = 0 \quad (\text{B-1})$$

$$\frac{J_m(U)}{UJ_{m+1}(U)} - \frac{K_m(W)}{WK_{m+1}(W)} = 0 \quad (\text{B-2})$$

显然, 这两个方程分别和 LP_{mn} 模的特征方程 (6.3-11b) 和 (6.3-11a) 是相同的, 即

$$\frac{UJ_{m-1}(U)}{J_m(U)} = -\frac{WK_{m-1}(W)}{K_m(W)} \quad (\text{B-3})$$

$$\frac{UJ_{m+1}(U)}{J_m(U)} = \frac{WK_{m+1}(W)}{K_m(W)} \quad (\text{B-4})$$

由 Bessel 函数递推公式 $2mJ_m = UJ_{m+1} + UJ_{m-1}$ 和 $2mK_m = WK_{m+1} - WK_{m-1}$, 式 (B-3) 经代换得

$$\frac{1}{J_m}[2mJ_m - UJ_{m+1}] + \frac{1}{K_m}[WK_{m+1} - 2mK_m] = 0$$

整理后可得到 (B-4) 式, 此即 $HE_{m+1,n}$ 模的特征方程 (B-2)。可见四个特征方程 (B-1) ~ (B-4) 是等价的, 表明 LP_{mn} 模与 $EH_{m-1,n}$ 模、 $HE_{m+1,n}$ 模具有相同的特征方程, 从而特征值 U 也相同。

考虑矢量模的场分量, $EH_{m-1,n}$ 模和 $HE_{m+1,n}$ 模分别对应旋向相反的圆偏振波, 以相同相速度同向传播, 合成一个线偏振波, 自然可以说 LP_{mn} 模是 $EH_{m-1,n}$ 模和 $HE_{m+1,n}$ 模叠加而成的。

附录 C 自 伴 算 符

C.1 二维散度定理

将高斯公式 $\iiint \nabla \cdot \vec{A} dx dy dz = \oint \vec{A} \cdot d\vec{S}$ 应用于如图 C.1 所示的薄片区域，

则

$$dz \iint \nabla \cdot \vec{A} dx dy = \iint_S \vec{A}' \cdot d\vec{S} - \iint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} + \oint \vec{A} \cdot \vec{n} dl \cdot dz$$

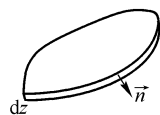


图 C.1

即

$$\iint_S \nabla \cdot \vec{A} dx dy = \iint_S \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} \cdot d\vec{S} + \oint \vec{A} \cdot \vec{n} dl \quad (C-1)$$

\vec{n} 代表边界线的外法线方向的单位矢量，这是二维散度定理的一种表示形式。

由上式得

$$\iint_S \nabla_t \cdot \vec{A}_t dS + \iint_S \frac{\partial A_z}{\partial z} \cdot dS = \iint_S \frac{\partial A_z}{\partial z} \cdot dS + \oint \vec{A} \cdot \vec{n} dl$$

即

$$\iint_S \nabla_t \cdot \vec{A}_t dS = \oint \vec{A} \cdot \vec{n} dl \quad (C-2)$$

这是散度定理的第二种形式，称面散度定理。

对光波导情况，截面区域属于无限大边界、零边界条件，由于 $\oint \vec{A} \cdot \vec{n} dl = 0$ ，所以

$$\iint_S \nabla_t \cdot \vec{A}_t dS = 0 \quad (C-3)$$

这是散度定理的第三种形式。

C.2 自 伴 算 符

选择波导截面为积分区域，利用无限大零边界条件，由式 (C-3) 得

$$\iint_S \nabla_t \cdot (\psi \nabla_t \varphi) dS = 0$$

展开运算，有

$$\iint_S \psi \nabla_t^2 \varphi dS + \iint_S \nabla_t \psi \cdot \nabla_t \varphi dS = 0$$

同理，由 $\iint_S \nabla_t \cdot (\varphi \nabla_t \psi) dS = 0$ ，得

$$\iint_S \varphi \nabla_t^2 \psi dS + \iint_S \nabla_t \varphi \cdot \nabla_t \psi dS = 0 \quad (C-4)$$

因此有

$$\iint_S \psi \nabla_t^2 \varphi dS = \iint_S \varphi \nabla_t^2 \psi dS = - \iint_S \nabla_t \varphi \cdot \nabla_t \psi dS \quad (C-5)$$

在一定的边界条件下，如果积分式中算符 L 两边的函数可互换，即满足

$$\iint_S \psi L \varphi dS = \iint_S \varphi L \psi dS \quad (C-6)$$

则称算符 L 是自伴算符。这里 ∇^2 即是自伴算符。

参 考 文 献

- 1 叶培大, 吴彝尊. 光波导技术基本理论. 北京: 人民邮电出版社, 1981
- 2 郭硕鸿. 电动力学. 北京: 高等教育出版社, 2008
- 3 曹庄琪. 导波光学. 北京: 科学出版社, 2007
- 4 陈朴深. 古斯-汉森位移. 湖州师专学报, 1992. 5: 39-43
- 5 Artmann K. Berechnung der seitenversetzung des total reflektierten strahles. Annals of Physics, 1948. 2:87-102
- 6 M.玻恩, E.沃耳夫. 光学原理. 北京: 科学出版社, 1978
- 7 李玉权, 崔敏. 光波导理论与技术. 北京: 人民邮电出版社, 2002
- 8 徐森祿, 凌世德, Loulergue. 光波导及其应用. 杭州: 浙江大学出版社, 1990
- 9 石守勇. 光波导原理. 北京: 高等教育出版社, 1989
- 10 李玲, 黄永清. 光纤通信基础. 北京: 国防工业出版社, 1999
- 11 (澳) A.W. 斯奈德, J.D.洛夫, 著. 周幼威, 林志瑗, 姚慧海, 张一龙, 译. 光波导理论. 北京: 人民邮电出版社, 1991
- 12 Snyder, A.W. Leaky-ray theory of optical waveguide of circular cross-section. Appl.Phys., 1974. 4:273-298
- 13 秦秉坤, 孙雨南. 介质光波导及其应用. 北京: 北京理工大学出版社, 1991
- 14 (美) R.G.汉斯伯格, 著, 刘树杞, 蔡伯荣, 陈铮, 编译. 集成光学导论. 北京: 国防工业出版社, 1983
- 15 (日) 西原浩, 春名正光, 栖原敏明, 著. 梁瑞林, 译. 集成光路. 北京: 科学出版社, 2004
- 16 Marcatali E A J. Dielectric rectangular waveguide and directional coupler for integrated optics. Bell system Technology Journal, 1969. 48:2071-2102,
- 17 马春生, 刘式慵. 光波导模式理论. 长春: 吉林大学出版社, 2007
- 18 秦政坤, 马春生. 光波导简明教程. 北京: 高等教育出版社, 2011
- 19 孙飞, 刘润民, 李国正. 有效折射率法的研究. 半导体光电, 2001. 22(1): 34-37
- 20 Tamir T. Integrated Optics. 2nd ed. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1979
- 21 R.Chakraborty, P.Ganguly et al. Modal profiles in Ti: LiNbO₃ two-waveguide and three-waveguide couplers by effective-index-based matrix method, Optics Communications, 2001. 187: 155-163
- 22 Hirotsuke Furuta, Hideki Noda, and Akira Ihaya. Novel Optical Waveguide for Integrated Optics, Applied Optics, 1974. 13(2): 322-326
- 23 (日) 末松安晴, 伊贺健一, 著. 金轸裕, 译. 光纤通信. 北京: 科学出版社, 2004
- 24 E. SNITZER. Cylindrical Dielectric Waveguide Modes. Journal of the OPTICAL OF SOCIETY AMERICA, 1961. 51(5):491-498
- 25 D.Gloge. Dispersion in weakly guiding fibers. Applied Optics, 1971. 10(11): 2442-2445
- 26 朱秋萍, 钮晋炜, 方志豪. 光纤波导场型分布的解析理论. 武汉大学学报(自然科学版), 1997. 43(5): 667-672
- 27 聂秋华. 单模光纤及其特性参数测量. 台北: 全华科技图书股份有限公司, 1994
- 28 周树同. 光纤理论与测量. 上海: 复旦大学出版社, 1988
- 29 杨高波, 徐铁峰, 宋玉兰, 俞建定, 陈征. 两种快速测量单模光纤模场半径的方法及装置. 光学仪器,

2004. 26(3): 60–63

- 30 C.Vassallo. Mode Solvers 1993–1995 Optical mode solvers, *Optical and Quantum Electronics*, 1997. 29: 95–114
- 31 Sangin Kim and Anand Gopinath. Vector Analysis of Optical Dielectric Waveguide Bends Using Finite-Difference Method, *Journal of Lightwave Technology*, 1996. 14:2085–2092
- 32 Kunimasa Saitoh, et al. Full-vectorial Finite Element Beam Propagation Method with Perfectly Matched Layers for Anisotropic Optical Waveguides, *Journal of Lightwave Technology*, 2001. 19:405–413
- 33 William Berglund and Anand Gopinath. WKB Analysis of Bend Losses in Optical Waveguides, *Journal of Lightwave Technology*, 2000. 18: 1161–1166
- 34 Gilbert S., George J. F. An analysis of the finite Element Method; Prentice Hall series in automatic computations, 1973
- 35 Adeboye K. R.. H-Galerkin-Collocation and Quasi-iterative Method for boundary value problem, *Abacus*, 1997. 25:286–300
- 36 倪光正, 钱秀英, 等. 电磁场数值计算. 北京: 高等教育出版社, 1996
- 37 张榴晨, 徐松. 有限元法在电磁场计算中的应用. 北京: 中国铁道出版社, 1996
- 38 金建铭(美), 王建国, 译. 电磁场有限元方法. 西安: 西安电子科技大学出版社, 1998
- 39 (美)W.T.TSANG. 半导体集成光电子学. 北京: 电子工业出版社, 1993
- 40 S. Selleri and J. Petracek. Modal analysis of rib waveguide through finite element and mode matching methods, *Optical and Quantum Electronics*, 2001. 33:373–386
- 41 K. S. Chiang. Review of numerical and approximate methods for the modal analysis of general optical dielectric waveguides, *Optical and Quantum Electronics*, 1994. 26: S113–S134
- 42 N.Mabaya, P.E.Lagasse, and P.Vandenbulcke. Finite Element Analysis of Optical Waveguides, *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 1981. vol. MTT-29: 600–605
- 43 M.Hano. Finite-element analysis of dielectric-loaded waveguides. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, 1984. vol. MTT-32:1275–1279
- 44 A.Kameari. Three dimensional eddy current calculation using edge elements for magnetic vector potential. *Applied Electromagnetics in Materials*. K.Miya, Ed. Oxford: Pergamon Press, 1986. 225–236
- 45 杨笛, 任国斌, 王义全. 导波光学基础. 北京: 中央民族大学出版社, 2012
- 46 王健. 导波光学. 北京: 清华大学出版社, 2010
- 47 唐天同, 王兆宏, 陈时. 集成光电子学. 西安: 西安交通大学出版社, 2005
- 48 Hill K O, Fujii Y, Johnson D C et al. Photosensitivity in optical fiber waveguide: application to reflection filter fabricateon. *Appl. Phys. Lett.*, 1978. 32(10): 647–649
- 49 Meltz G, Morey M M, Glenn W H. Formation of Bragg Gratings in optical fibers by a transverse holographic method. *Opt.Lett.*, 1989. 14(5):823–825
- 50 Lam D K, Garside B K.. Characterization of single-mode optical fiber filters. *Appl.Optics*, 1981. 20(3):440–445
- 51 Bhatia V. Properties and Applications of Fiber Gratings. *SPIE.*, 2001. 4417: 154–160
- 52 Sipe J E, Poladian L, Martijin de Sterke C.. Propagation Through Nonuniform Grating Structures. *Journal of the Optical Society of America A*, 1994. 11:1307–1320
- 53 Ouellette E.. Dispersion cancelation using linearly chipped Bragg gration filters in optical waveguides. *Optics Letters*, 1987.12:847–849
- 54 Brady G P et al. Extended range, coherence tuned, dual wavelength interferometry using a superfluorescent fiber source and chirped fiber Bragg gratings. *Optics Communication*, 1997. 134:341–346

- 55 Wysocki P F et al. Broad-Band Erbium-doped fiber amplifier flattened beyond 40 nm suing long-period grating fiber. IEEE photonics Technology letters, 1997. 9:1343-1345
- 56 李川, 张以谟, 赵永贵, 李立京. 光纤光栅. 北京: 科学出版社, 2005
- 57 饶云江, 王义平, 朱涛. 光纤光栅原理及应用. 北京: 科学出版社, 2006
- 58 赵梓森, 等. 光纤通信工程. 北京: 人民邮电出版社, 1994
- 59 宋贵才, 全薇. 光波导理论与器件. 北京: 清华大学出版社, 2012
- 60 小林功郎. 光集成器件. 北京: 科学出版社, 2002
- 61 李苹, 等. 光开关技术研究. 光通信技术, 2004. (4): 15
- 62 黄章勇. 光开关器件与性能. 飞通光电子技术, 2001. 1(1): 11
- 63 马慧莲. 光开关研究新进展. 光通信研究, 2003. 117(3): 51
- 64 杨祥林. 光纤通信系统. 北京: 国防工业出版社, 2000
- 65 纪越峰. 光波分复用系统. 北京: 北京邮电大学出版社, 1999
- 66 周炳琨, 等. 激光原理. 北京: 国防工业出版社, 2004
- 67 [美] Robert G Hunsperger. 集成光学理论与技术. 叶玉堂, 等译. 北京: 电子工业出版社, 2012
- 68 郭建强. 基于硅的阵列波导光栅的理论分析. 激光技术, 2007. 31(6):620-623
- 69 SMIT M K. New focusing and dispersive planar component based on an optical phased array. Electron Lett, 1988. 24(7): 385-386.
- 70 TAKAHASHI H, TOBA H. Transmission characteristics of arrayed wave-guide N×N wavelength multiplexer. Journal of Lightwave Technology, 1995. 13(3):7~14
- 71 A.Kaneko,T.Goh, et al. Design and applications of silicon-based planar light-wave circuits. IEEE J. Selected Topics in Quantum Elec.,1999.5:1227-1236
- 72 Polman A. Erbium implanted thin film photonic materials, J. Appl. Phys., 1997. 82(1): 1-39,
- 73 B.R.Judd. Optical absorption intensities of rare-earth ions, Phys. Rev., 1962. 127: 750-761,
- 74 G.S.Ofelt. Intensities of crystal spectra of rare-earth ions, J.Chem.Phys., 1962. 37: 511-520,
- 75 Van den hoven G N, Koper R J M and Polman A. Net optical gain at 1.53μm in Er-doped Al₂O₃ waveguides on silicon Appl.Phys.lett., 1996. 68(14): 1886-1888
- 76 A.Shooshtari et al. Yb³⁺ sensitized Er³⁺-doped waveguide amplifiers: a theoretical approach, Optical and Quantum electronics, 1998. 30(3):249-269
- 77 B.Simondi-Teisseire, B.Viana, D.Vivien, et al. Optical Materials, 1996. 6: 267-274
- 78 M.P.Hehlen, N.J.Cockroft, T.R.Gosnell, et al. Physical Review B, 1997.56: 9302-9318
- 79 V.P. Gapontsev, S.M. Mtsin, A.A. Isineev, V.B. Kravchenko. Opt. Laser Technol., 1982.14(4):189-196
- 80 李淑凤, 李成仁, 宋昌烈. 掺 Er 及 Yb-Er 共掺 Al₂O₃ 光波导放大器的理论与实验研究.光学学报, 2007. 27(5):928-934
- 81 G.N. van den Hoven, Jan A. Van der. Elsken, et al. Absorption and emission cross sections of Er³⁺ in Al₂O₃ waveguides. Applied Optics, 1997. 36(15): 3338~3341
- 82 Giles, C. R. and E. Desurvire. Modeling erbium-doped fiber amplifiers. J. Lightwave Technol. , 1991. 9(2): 271~283
- 83 聂秋华. 光纤激光器和放大器技术. 北京: 电子工业出版社, 1997
- 84 Hill K O et at. Photosensitivity in Optical Fiber Waveguides: Application to Reflection Filter Fabrication, Applied Physics Letters,1978. 32(10):647-649
- 85 Kawasaki B S et al. Narrow-Band Bragg Reflectors in Optical Fibers, optics Letters,1978. 3:66-68
- 86 Bennion I et al. UV-written In-Fiber Bragg Gratings, Optical and Quantum Electronics,1996. 28(2):93-135

- 87 Meltz G, Morey W W, Glenn W H. Formation of Bragg Gratings in Optical Fibers by a Transverse Holographic Method, *Optics letters*, 1989. 14:823-825
- 88 张思远. 稀土离子的光谱学. 北京: 科学出版社, 2008
- 89 龚曙光. ANSYS 基础应用及范例解析. 北京: 机械工业出版社, 2003
- 90 李淑凤, 宋昌烈. 不同波长泵浦的掺铒 Al_2O_3 薄膜光波导 1.53 μm 荧光特性. *光电子·激光*, 2001. 12(1): 14-18
- 91 李淑凤, 等. 掺 Er 及 Yb-Er 共掺 Al_2O_3 光波导放大器噪声特性的数值模拟. *光子学报*, 2008. 37(6): 1093-1097
- 92 Mears et al. Low-noise erbium-doped fibre amplifier operating at 1.54 μm . *Electro. Lett.*, 1987. 23(19): 1026-1028
- 93 Wysocki et al. Broad-band erbium-doped fiber amplifier flattened beyond 40 nm using long-period grating filter. *Photo. Techn. Lett.*, 1997. 9(10): 1343-1345
- 94 Hak-Seung Han et al. Optical gain at 1.54 μm in erbium-doped silicon nanocluster sensitized waveguide. *Appl. Phys. Lett.*, 2001. 79: 4568-4570
- 95 Pasquale et al. Analysis of erbium-doped waveguide amplifiers by a full-vectorial finite-element method. *J. Lightwave Technol.*, 1993. 11(10): 1565-1574
- 96 杨建虎, 等. 稀土离子的上转换发光及研究进展. *物理学进展*, 2003. 23(3): 284-298
- 97 李成仁, 宋昌烈, 李淑凤, 等. 高浓度掺铒/铕共掺硅酸盐玻璃丝的净增益测量. *激光技术*, 2005. 29(5): 535-537
- 98 李成仁, 明成国, 李淑凤, 等. 铕共掺 Al_2O_3 薄膜上转换机制及其温度特性. *物理学报*, 2008. 57(10): 6604-6608
- 99 Li Chengren, Lei Mingkai, Li Shufeng, et al. Fabrication and Photoluminescence Characteristics of Non-uniform Yb-Er Co-doped Films. *J. Rare Earths*, 2008. 26(1): 31-34
- 100 Li Chengren et al. Green and red up-conversion emissions and thermometric application of Er^{3+} -doped silicate glass. *Chin. Phys. B*, 2008. 17(1): 224
- 101 Qi Song, Jingsong Gao, et al. Photoluminescence enhancement in $\text{Yb}^{3+}:\text{Er}^{3+}$ co-doped eutectic $\text{Al}_2\text{O}_3:\text{SiO}_2$ thin films by 980nm excitation. *Optics Express*, 2007. 15(7): 3948-3954
- 102 PASQUALE F D, FEDERIGHI M. Modeling of Uniform and Pair-Induced Upconversion Mechanisms in High-Concentration Erbium-Doped Silica Waveguides[J]. *J Lightwave Technol*, 1995. 13(9): 1858-1864.
- 103 程成, 张航. 半导体纳米晶体 PbSe 量子点光纤放大器. *物理学报*, 2005. 55(8): 4139-4144.
- 104 C.E.Chryssou, F.Di Pasquale and C.W.Pitt. Improved Gain Performance In Yb^{3+} -Sensitized Er^{3+} -Doped Alumina (Al_2O_3) Channel Optical Waveguide Amplifiers, *Journal of Lightwave Technology*, 2001. 19(3): 345-349
- 105 K. Thyagarajan, Jagneet Kaur. A novel design of an intrinsically gain flattened erbium doped fiber. *Optics Communications*, 2000. 183(5-6): 407-413
- 106 Yablonovitch E. Inhibited spontaneous emission in solid-state physics and electronics. *Phys.Rev.Lett.*, 1987. 58(20): 2059-2062
- 107 John S. Strong localization of photons in certain disordered dielectric superlattices. *Phys.Rev.Lett.*, 1987. 58(23): 2486-2489
- 108 马锡英. 光子晶体原理及应用. 北京: 科学出版社, 2010
- 109 温熙森. 光子/声子晶体理论与技术. 北京: 科学出版社, 2006
- 110 叶卫民. 光子晶体导论. 北京: 科学出版社, 2010

- 111 Plihal M, Maradudin A A. Photonic band structure of two-dimensional systems: The triangular lattice. *Phys.Rev.B*,1991,44(16):8565–8571
- 112 Freeman, D. et al. Chalcogenide glass photonic crystals. *Photonics and Nanostructures – Fundamentals and Applications*, 2008. 6(1): 3–11
- 113 Lee, M.W., et al. Photowritten high-Q cavities in two-dimensional chalcogenide glass photonic crystals. *Optics Letters*, 2009. 34(23): 3671–3673
- 114 Lee, M.W., C. Grillet, and e.a. Snjezana Tomljenovic–Hanic. Photoinduced high-Q cavities in chalcogenide photonic crystals. *IEEE*, 2009. 978–1–4244–3681–1: 821–822
- 115 Johnson, S.G., et al. Guided modes in photonic crystal slabs. *Phys. Rev. B*, 1999. 60(8): 5751–5758
- 116 Bettini, P., et al. Design Optimization of Waveguide Bends in Photonic Crystals. *IEEE Transactions on Magnetics*, 2009. 45(3): 1630–1633
- 117 Barclay, P.E., et al. Efficient input and output fiber coupling to a photonic crystal waveguide. *Optics Letters*, 2004. 29(7): 697–699
- 118 MIZUTA E, WATANABE H, BABA T. All Semiconductor Low- Δ Photonic Crystal Waveguide for Semiconductor Optical Amplifier[J].*Japanese Journal of Applied Physics*, 2006. 45(8A):6116–6120
- 119 Johnson, S.G., et al. Linear waveguides in photonic-crystal slabs. *Phys. Rev. B*, 2000. 62(12): 8212–8222
- 120 Mekis, A., S. Fan, and J.D. Joannopoulos. Bound states in photonic crystal waveguides and waveguide bends. *Phys. Rev. B*, 1998. 58(8): 4809–4817
- 121 Bayer, C. and M. Straub. Small-hole waveguides in silicon photonic crystal slabs: efficient use of the complete photonic bandgap. *Applied Optics*, 2009. 48(27): 5050–5054
- 122 Yong-Seok Choi, Joo Yeon Sung, Se-Heon Kim, et al. Active silicon-based two-dimensional slab photonic crystal structures based on erbium-doped hydrogenated amorphous silicon alloyed with carbon. *Applied Physics Letters*,2003. 83(16): 3239–3241
- 123 W.lee, M., et al. Photosensitive post tuning of chalcogenide photonic crystal waveguides. *Optics Express*, 2007. 15(3): 1277–1285
- 124 Christian Grillet, Cameron Smith, Darren Freeman, et al. Efficient coupling to chalcogenide glass photonic crystal waveguides via silica optical fiber nanowires, *OPTICS EXPRESS*, 2006. 14(3): 1070–1078
- 125 麻蒔立男, 著. 陈国荣, 等译. 薄膜制备技术基础. 北京: 化学工业出版社, 2009
- 126 唐伟忠. 薄膜材料制备原理、技术与应用. 北京: 冶金工业出版社, 2008
- 127 田民波, 等. 薄膜技术手册. 北京: 机械工业出版社, 1991
- 128 金曾孙. 薄膜制备技术及其应用. 长春: 吉林大学出版社, 1989
- 129 吴自勤, 等. 薄膜生长. 北京: 科学出版社, 2001
- 130 聂磊, 等. Cr 掩膜在硅湿法刻蚀中的应用研究. *半导体技术*, 2005. 30(12): 26
- 131 卢德江, 等. 等离子体低温刻蚀单晶硅高深宽比结构. *真空科学与技术学报*, 2007. 27(1):25
- 132 范忠, 等. 等离子体横向刻蚀硅的特性研究. *微细加工技术*, 2001. 2: 38
- 133 范忠, 等. 硅的横向刻蚀技术研究. *微电子学*, 2001. 31(3): 195
- 134 任泰安, 等, 用 SF_6/O_2 气体 ICP 刻蚀硅深槽基片温度对刻蚀速率的影响. *河南机电高等专科学校学报*, 2006. 14(6): 1
- 135 Chengren Li, Changlie Song, Shufeng Li, et al. Experimental Investigation of Photoluminescence Spectra of Yb Sensitive Er-Doped Glass Samples in Series. *Chinese Optics Letters*, 2003. 1(11): 664–667
- 136 Li Chengren, Lei Mingkai, Li Shufeng, Liu Yufeng, Song Changlie. Fabrication and Photoluminescence Characteristics of Non-uniform Yb-Er Co-doped Films. *J. Rare Earths*, 2008. 26(1): 31–34

- 137 宋琦, 等. 基于中频溅射掺铒 Al_2O_3 薄膜的光致发光特性. 光学技术, 2005. 31 (4): 519~521
- 138 李成仁, 等. 溶胶-凝胶 (sol-gel) 法制作掺铒 Al_2O_3 薄膜及其光致发光光谱特性的测量. 光子学报, 2003. 32 (12): 1514~1517
- 139 Qi Song, Cheng-Ren Li, Jian-Yong Li, et al. Photoluminescence properties of the Yb:Er co-doped Al_2O_3 thin film fabricated by microwave ECR plasma source enhanced RF magnetron sputtering. Optical materials, 2006. 28:1344~1349
- 140 Qi Song, Jing-Song Gao, Xiao-Yi Wang, et al. Effect of pulse CO_2 laser annealing on the crystallization of Er^{3+} doped Al_2O_3 thin film to a silica-on-silicon substrate. Optics Communications, 2007. 271 (1): 137-141
- 141 Bugaev S P, et al. Deposition of highly adhesive amorphous carbon films with the use of preliminary plasma-immersion ion implantation. Surf. Coat. Tech., 2002. 156 (1-3): 311
- 142 Hsieh J J. Influence of surface-activated reaction kinetics on low-pressure chemical vapor deposition conformality over micro features. J. Vac. Sci. Tech., 1993. 11 (1): 78
- 143 Thornton J A. Influence of apparatus geometry and deposition conditions on the structure and topography of thick sputtered coatings. J. Vac. Sci. Tech., 1974. 11 (4): 666
- 144 S.J.Madden, K.T.Vu. Very low loss reactively ion etched Tellurium Dioxide planar rib waveguides for linear and non-linear optics. Optics Express, 2009. 17 (20): 17645-17651, 2009
- 145 Marie-Laure Anne, Julie Keirsse, Virginie nazabal, et al. Chalcogenide Glass Optical Waveguides for Infrared Biosensing. Sensors, 2009. 9 (9): 7398-7411
- 146 Darren Freeman a, Christian Grillet b, Michael W. Lee, et al. Chalcogenide glass photonic crystals. Photonics and Nanostructures – Fundamentals and Applications, 2008. 6: 3-11
- 147 Z. L. Samson, K. F. MacDonald, F. De Angelis, et al. Metamaterial electro-optic switch of nanoscale thickness. Appl. Phys. Lett., 2010. 96: 143105



欢迎登录 **免费** 获取优质教学资源
<http://www.hxedu.com.cn>

光电信息科学与工程类专业规划教材

光波导理论

基础教程

本书以几何光学和波动光学理论为基础，系统介绍了介质光波导的分析方法和光传输特性。主要内容
包括各种波导的解析与数值分析方法、模式分类与特征、模式场的分布与传输特性、模耦合理论等，并介
绍了几种无源光波导器件和光波导放大器的工作原理及特性，以及光子晶体波导。

本书可作为光学工程、光电子、光通信等专业的研究生及高年级本科生的教材，也可供相关专业的教
师和科研人员参考。



策划编辑：韩同平
责任编辑：韩同平
封面设计：张 昱

ISBN 978-7-121-19714-7



9 787121 197147 >

定价：39.90 元